

单粒子的远场辐射

笔者：参宿四星云

如需转载，请告知笔者，并在转载处注明出处。

本文考虑的粒子是相对论性的、有加速度的，在闵氏时空中的带电粒子。

本文将从麦克斯韦方程组出发，通过李纳-维谢尔势导出电磁场、坡印廷矢量，由此计算单粒子的远场辐射角分布，并画出若干辐射幅角分布图。

1. 前置知识

1.1 电磁势的达朗贝尔方程

从真空中的麦克斯韦方程组出发，即

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \quad (1d)$$

再使用以下的变换关系引进矢势 $\mathbf{A}$ 与标势 φ ，二者可以合称为“电磁势”。

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2b)$$

可以将 $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ 转换为 $(\mathbf{A}, \varphi)$ 。在把麦克斯韦方程组转换为 $(\mathbf{A}, \varphi)$ 的形式之前，先容我稍微阐释一下这两个新变量。

从 (2a)(2b) 可以看出， $\mathbf{A}$ 与 φ 确实是某种“势”，这是因为，若给全空间的 $\mathbf{A}$ 与 φ 都加上一个常数，或是使 $(\mathbf{A}, \varphi)$ 加上任意的 $(\nabla f, -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t})$ ，重新计算出的 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 这两个“物理实在”，是不会发生任何变化的。因此，在经典电磁场理论中，无需关心 $\mathbf{A}$ 与 φ 的绝对大小，只需关心它们的时间变化率、旋度散度梯度等等相对的大小，或者说“势场的局部结构”。若不是为了计算方便，也无需定义 $\mathbf{A}$ 与 φ 的零点。

再结合洛伦茨(Lorenz, not Lorentz)规范

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

可以将 (1a) 与 (1d) 转换为 $(\mathbf{A}, \varphi)$ 的如下形式

((具体可以是将 (2a)(2b) 代入 (1a) 再联立 (3) 得到 (4a)，将 (2a)(2b) 代入 (1d) 再联立 (3) 得到 (4b)。))

$$\nabla^2 \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (4b)$$

以上两式也被称为经典电动力学的达朗贝尔方程，若 $\rho, \mathbf{J} = 0$ 则为简单的波动方程。可以清晰地看到，电磁波（在真空中）传播的速度为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (5)$$

以上的两个达朗贝尔方程，形式几乎相同。只需定义以下的两个四维矢量，便可以将 (4a) (4b) 合二为一。定义

$$A^\mu := (\varphi, \mathbf{A}) \quad (6a)$$

$$J^\mu := (c^2 \rho, \mathbf{J}) \quad (6b)$$

还可以再将 ∇^2 与 $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 合二为一，由此定义达朗贝尔算符：

$$\square := \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (7)$$

那么 (4a)(4b) 就转换为以下的简洁形式：

$$\square A^\mu = -\mu_0 J^\mu \quad (8)$$

如果直接承认 A^μ 与 J^μ 是洛伦兹变换四维矢量（事实上，在广义相对论中也可以这么表示），那么，要研究单粒子运动形成的电磁势，只需把（粒子系的电磁势）加以洛伦兹变换。

1.2 李纳-维谢尔势

只要猜出了一组 φ 与 $\mathbf{A}$ 的解（需要满足以上所有方程），那么它在经典电动力学中就可以直接使用。以下笔者不加证明地摆出一组解

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{r} dV' \quad (9a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{r} dV' \quad (9b)$$

这组解就是李纳-维谢尔势(Liénard-Wiechert potentials)，也可以写为四维形式：

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J^{\mu'}(\mathbf{x}', t')}{r} dV' \quad (10)$$

这里的 $t' = t - \frac{r}{c}$ ，它并不代表任何坐标系的时间，而是代表源点的时间为 t' 时，源点的状态产生的效应在 t 时到达场点（真空中电磁信息以光速 c 传播）。换句话说，场点在 t 时刻看到的源点，是源点在先前的 t' 时刻的状态。因此，在计算某个场点在 t 时刻的电磁势或电磁场时，在对源点产生的效应进行积分时，我们需要使用“源点时间” t' 。在以下的公式推导中，源点的位置、时间、体积总是带一撇。

2. 点电荷产生的辐射

2.1 计算电磁势

本文仅考虑一个点电荷引起的场。那么由上一节李纳-维谢尔势的公式可以看出， $(\varphi, \mathbf{A})$ 与点电荷的速度有关（ $\mathbf{J} := \rho\mathbf{v}$ ），但与加速度无关。根据 (2a)， E 才与加速度有关。因此，在导出 $(\varphi, \mathbf{A})$ 的时候，无需考虑粒子的加速度，直接计算粒子在 t' 时的静电势，再加以洛伦兹变换，就可以得到 t 时刻场点的 $(\varphi, \mathbf{A})$ 。

粒子在 $(\mathbf{x}', t')$ 时在场点引起的电势，可以在 t' 时（发出辐射时）的粒子参考系 $\tilde{\Sigma}$ 下，可以用静电势来表示：

$$\tilde{\varphi} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}} \quad (11a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = 0 \quad (11b)$$

其中 $\tilde{r}$ 是粒子发射辐射时，粒子与场点在 $\tilde{\Sigma}$ 系下的距离，要通过洛伦兹变换，可以得到在观测者系 Σ 下的距离 $r(t')$ ，二者的关系为

$$\tilde{r} = \gamma \left(r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) \quad (12)$$

其中 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t')$ 为粒子发射辐射时，源点到场点的矢径，其长度为 r 。

已知粒子系 $\tilde{\Sigma}$ 相对观察者系 Σ 的速度为 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t')$ ，下面将粒子系下的 $(\tilde{\varphi}, \tilde{\mathbf{A}})$ 洛伦兹变换到观测者系下的 $(\varphi, \mathbf{A})$ ：

$$\varphi = \gamma \left(\tilde{\varphi} + \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}} \quad (13a)$$

$$\mathbf{A} = \gamma \left(\tilde{\mathbf{A}} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \tilde{\varphi} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}}{r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \varphi \quad (13b)$$

2.2 计算电磁场与辐射场的表达式

2.2.1 准备工作

根据 (2a)(2b)，要算 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ，需要算对 $\varphi, \mathbf{A}$ 关于 $\mathbf{x}, t$ 的导数。然而，(13a)(13b) 中的 $r, \mathbf{r}, \mathbf{v}$ ，都是 t' 的函数，不能直接对 $(\mathbf{x}, t)$ 求导。我们需要先把 $\mathbf{x}, t, t'$ 三者的微分关系弄清。

$$\begin{aligned} dt' &= d \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &= dt - \frac{1}{c} d(|\mathbf{r}|) \\ &= dt - \frac{1}{c} d \sqrt{[\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')] \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')]} \\ &= dt - \frac{1}{c} \frac{1}{r} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t')] \cdot [d\mathbf{x} - d\mathbf{x}_q(t')] \\ &= dt - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot [d\mathbf{x} - d\mathbf{x}_q(t')] \\ &= dt - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot [d\mathbf{x} - \mathbf{v} dt'] \\ &= dt - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{x} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{cr} dt' \end{aligned} \quad (14)$$

稍加整理，得到

$$dt' = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r}{c}} dt - \frac{\mathbf{e}_r}{c - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r} \cdot d\mathbf{x} \quad (15)$$

直接读出

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r}{c}} \quad (16a)$$

$$\nabla t' = - \frac{\mathbf{e}_r}{c - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r} \quad (16b)$$

下式是 (14) 的推导中的一个中间结果：

$$dr = \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{x} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r}{c} dt' \quad (17)$$

直接读出

$$\frac{\partial r}{\partial t'} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r \quad (18)$$

这在稍后的推导中可以用到。

那么，我们终于可以开始导出 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 了。

2.2.2 计算 $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned}
 \nabla\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial t'} \nabla t' + (\nabla\varphi)_{t' \text{ 不变}} \\
 &\stackrel{(13a)}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla t' \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}} \right) + \nabla \left(\frac{1}{r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}} \right)_{t' \text{ 不变}} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \nabla t' \frac{-\frac{\partial r}{\partial t'} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{\partial t'}}{\left(r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)^2} + \left[\frac{-\nabla r + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{\left(r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)^2} \right]_{t' \text{ 不变}} \right\} \\
 &\stackrel{(18)}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \nabla t' \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\left(r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)^2} + \frac{1}{\left(r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)^2} \left\{ -\mathbf{e}_r \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \right\}_{t' \text{ 不变}} \right\} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \nabla t' \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\left(r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)^2} + \frac{-\mathbf{e}_r + \frac{1}{c} [0 + \mathbf{v} + 0 + 0]}{\left(r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)^2} \right\} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)^2} \left[-\mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{v}}{c} + \nabla t' \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r} + v^2}{c} \right) \right] \\
 &\stackrel{(16b)}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)^2} \left[-\mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{v}}{c} - \frac{\mathbf{e}_r}{c - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r} + v^2}{c} \right) \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r}{c}\right)^2} \left[-\frac{\mathbf{e}_r}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r}{c}} \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r} + v^2}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{v}}{c} \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

为方便，设 $\frac{\partial t'}{\partial t} \stackrel{(16a)}{=} \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r}{c}} = \frac{1}{K}$ ，那么

$$\nabla\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 K^2} \left[-\frac{\mathbf{e}_r}{K} \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r} + v^2}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{v}}{c} \right] \quad (20)$$

接下来，计算 $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \\ &\stackrel{(13b)(16a)}{=} \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t'} + \varphi \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'} \right) \frac{1}{K} \\ &\stackrel{(13a)}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\mathbf{v} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r} + v^2}{c}}{r^2 K^2} + \frac{1}{rK} \dot{\mathbf{v}} \right) \frac{1}{K} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 K^2 c^2} \left[\frac{\mathbf{v}}{K} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r} + v^2}{c} \right) + r \dot{\mathbf{v}} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

那么，合并 (19)(20)，并使用 $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$ ，得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 K^3} \left\{ \frac{\mathbf{r}}{c} \times \left[\left(\mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \right] + \left(\mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 K^3} \left\{ \frac{1}{rc} \mathbf{e}_r \times \left[(\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right] + \frac{1}{r^2} (\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\beta}) (1 + \beta^2) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

在上式中不难发现，组成 $\mathbf{E}$ 的第一项只在有加速度时才出现，且 $\propto r^{-1}$ （符合球面波的特征）；第二项与加速度无关，仅取决于 $\mathbf{e}_r, \boldsymbol{\beta}$ ，且 $\propto r^{-2}$ （符合静电场的特征），并且在低速情况下，方向与 $\mathbf{e}_r$ 平行。因此，可以粗浅地认为，第一项即为“辐射电场”，第二项即为“静电场”。

2.2.3 计算 $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla t' \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'} + (\nabla \times \mathbf{A})_{t' \text{ 不变}} \\
&\stackrel{(16)(13b)}{=} -\frac{\mathbf{e}_r}{c - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r} \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} K \right) + \left[\nabla \times \left(\frac{1}{c^2} \varphi \mathbf{v} \right) \right]_{t' \text{ 不变}} \\
&= -\frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left[(\nabla \varphi) \times \mathbf{v} + \varphi (\nabla \times \mathbf{v}) \right]_{t' \text{ 不变}} \\
&= -\frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left[(\nabla \varphi) \times \mathbf{v} + 0 \right]_{t' \text{ 不变}} \\
&\stackrel{(20)}{=} -\frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 K^3 c^2} \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r} + v^2}{c^2} \right) \mathbf{e}_r \times \mathbf{v} \right]_{t' \text{ 不变}} \\
&\stackrel{(20)}{=} -\frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times \nabla \varphi \\
&\stackrel{(2a)}{=} \frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}
\end{aligned} \tag{23}$$

2.2.4 计算辐射场

下面计算坡印廷矢量(Poynting vector)，即电磁场的能流密度矢量。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \stackrel{(23)}{=} \epsilon_0 c E^2 \mathbf{e}_r \tag{24}$$

当我们只考虑远场辐射，可以将 $\mathbf{E}$ 表达式(22)的第二项略去，那么粒子的单位立体角辐射功率为

$$\begin{aligned}
\frac{dP(t')}{d\Omega} &= K \frac{dP(t)}{d\Omega} = K(\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_r) r^2 \stackrel{(24)}{=} K \epsilon_0 c E^2 r^2 \\
&\stackrel{(22)}{\approx} \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^2 K^5} \left| \mathbf{e}_r \times \left[(\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right] \right|^2
\end{aligned} \tag{25}$$

温馨提示： t 是观测者受到辐射所用的时间符号， t' 是粒子发出辐射所用的时间符号，二者都在观测者参考系下。

2.3 几种特定的单粒子辐射场

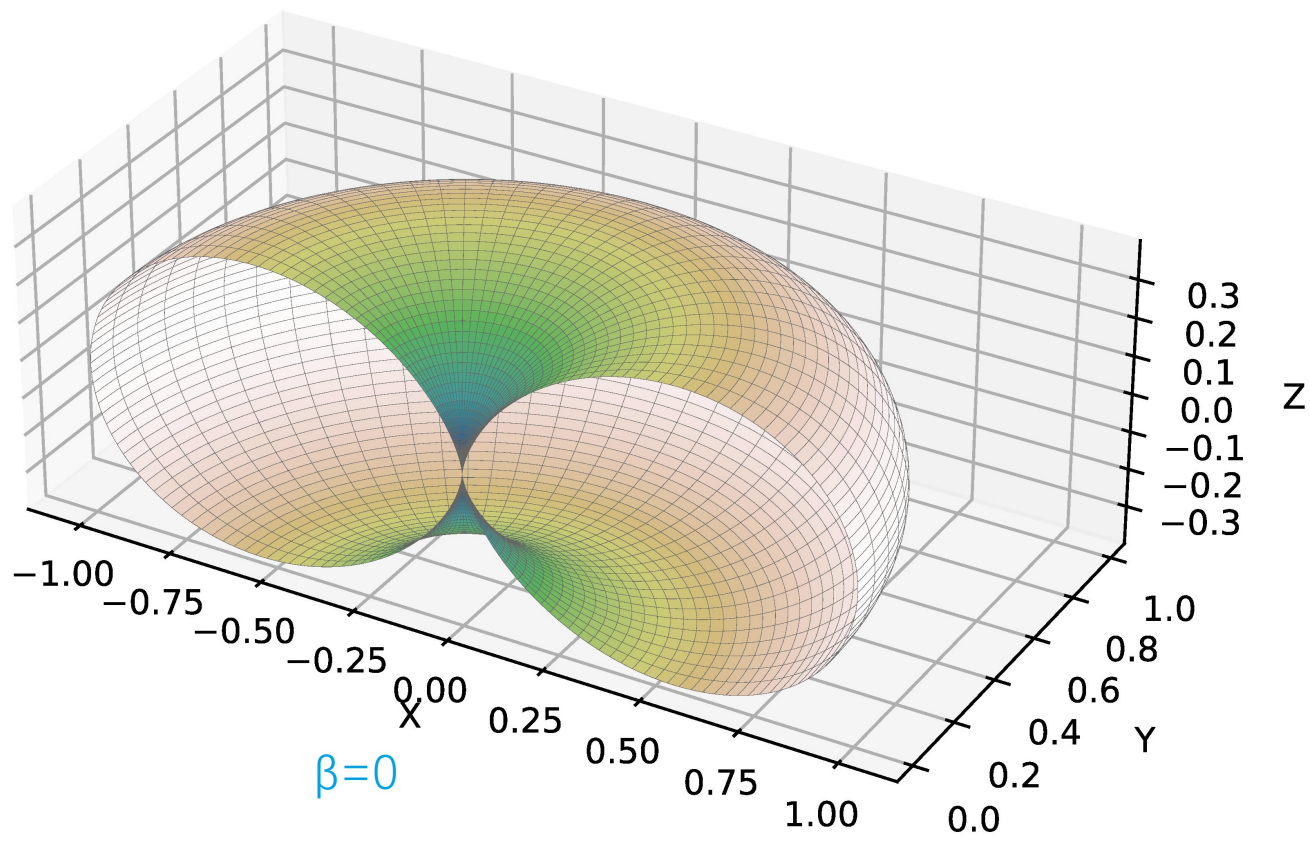
从(25)可以看出，非相对论情况下（ $\beta \ll 1$ ），辐射角分布图与速度无关，笔者用 Python 3.12 计算并绘制了非相对论情况下、几种相对论情况下的辐射角分布图。

由于以下的角分布图是关于 xz 平面对称的，为了方便观察，仅画出 $y > 0$ 的半边。

图中坐标轴的单位是 $\frac{q^2|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{16\pi^2\epsilon_0c^2}$.

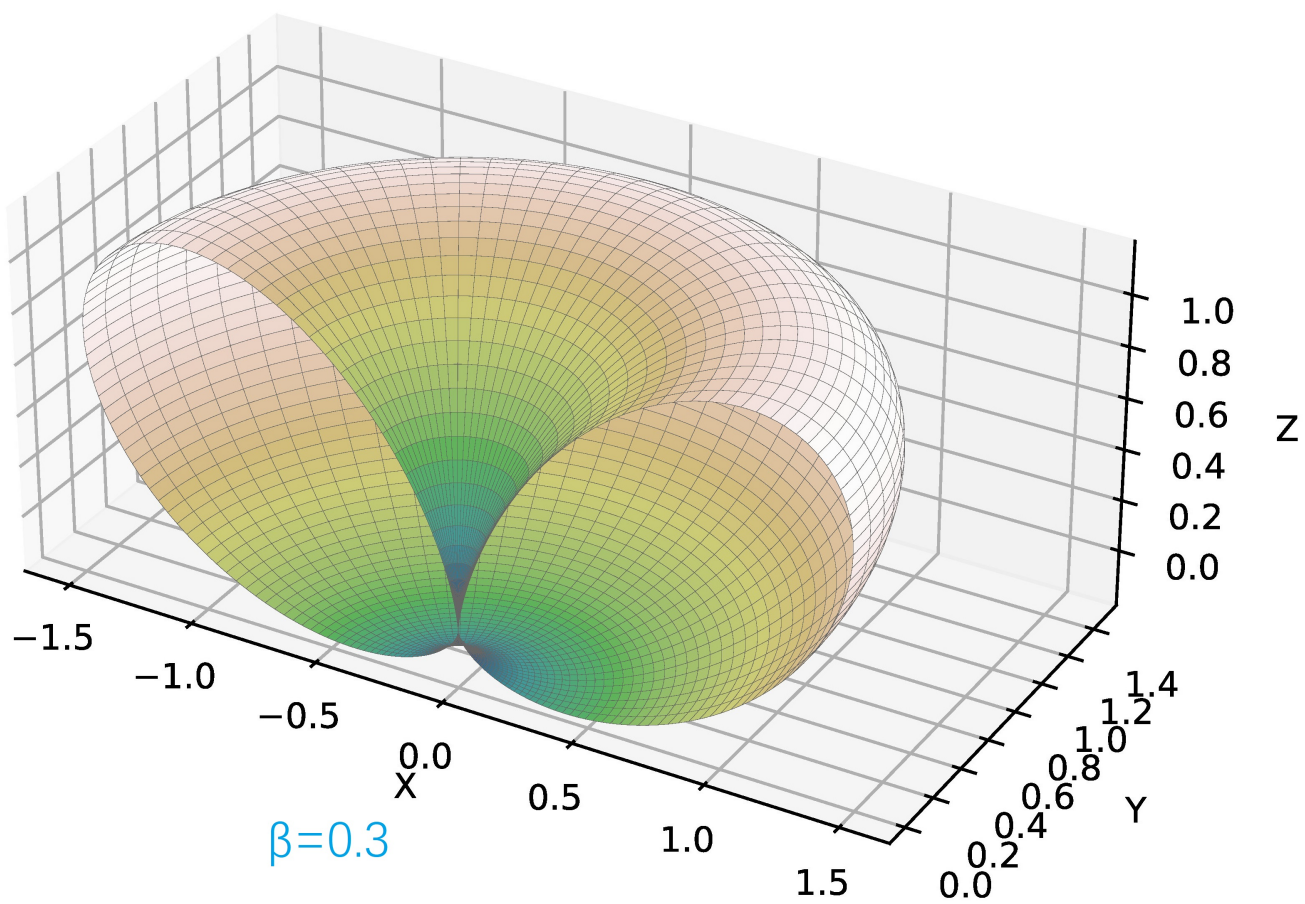
2.3.1 速度为零（或非相对论情况）

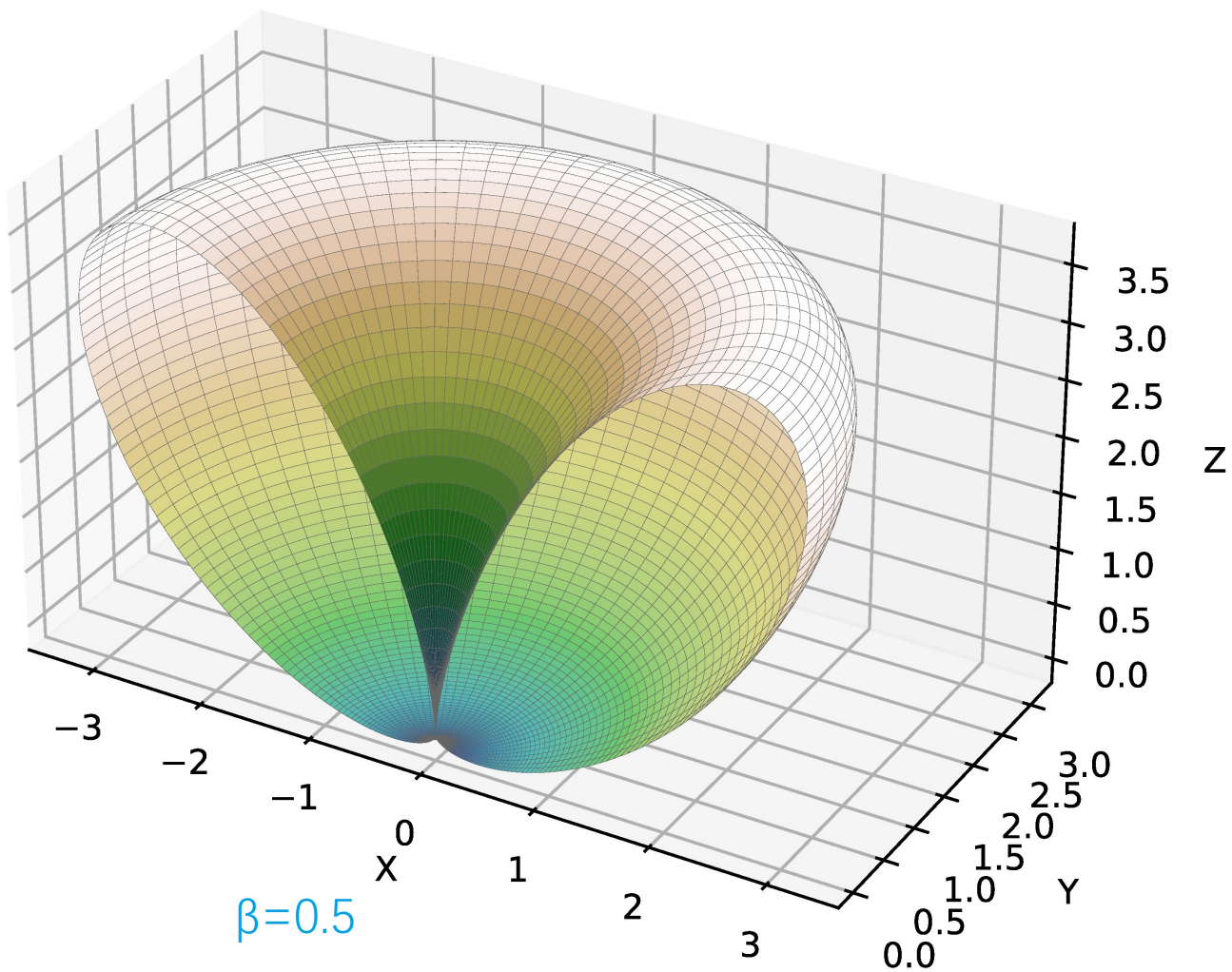
加速度沿 z 轴正方向。

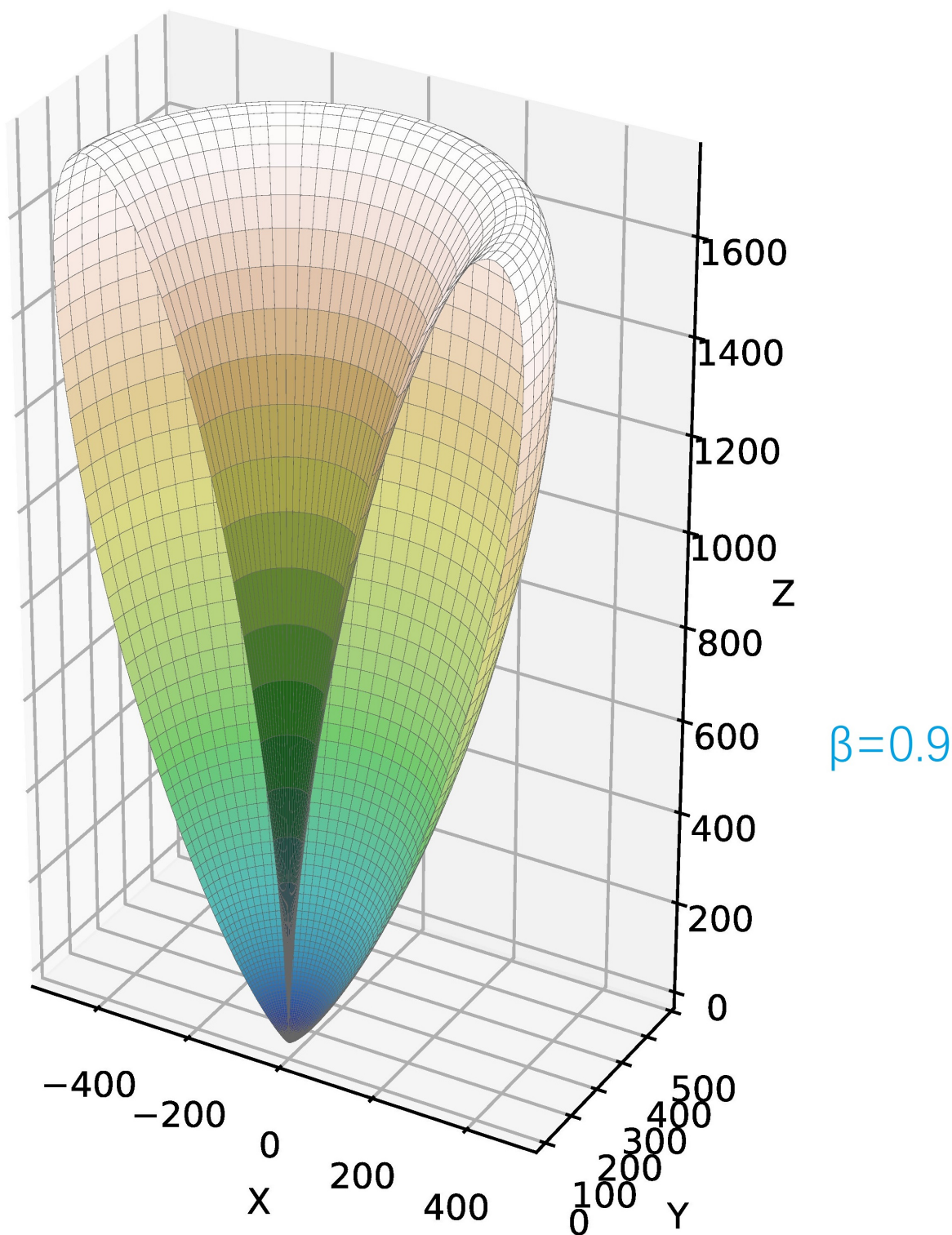


2.3.2 加速度与速度平行

加速度与速度均沿 z 轴正方向。速度矢量 $\boldsymbol{\beta} = \beta \mathbf{e}_z$ ，其中 β 取 0.3, 0.5, 0.9 的三种情况，依次对应如下的三幅辐射角分布图。

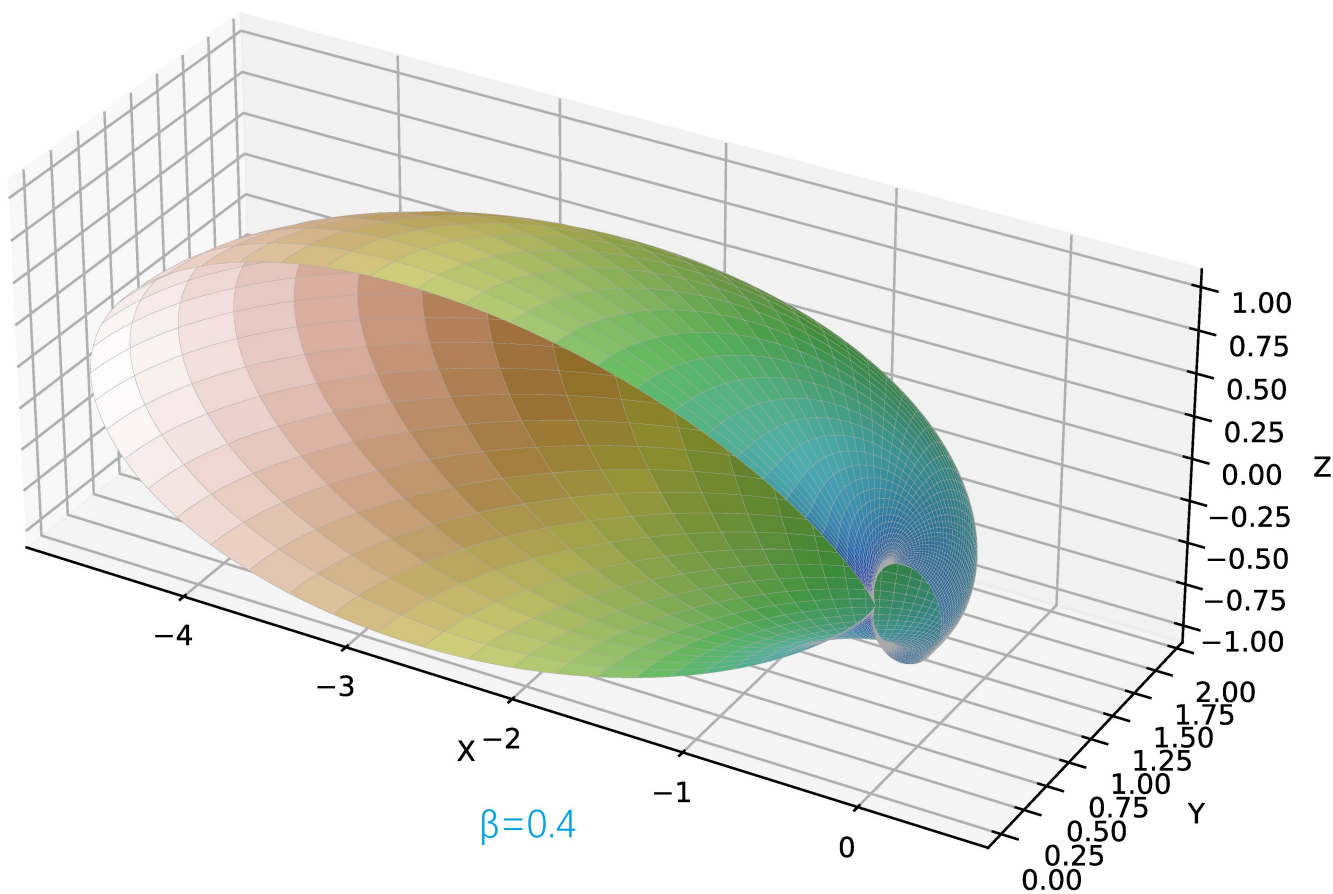
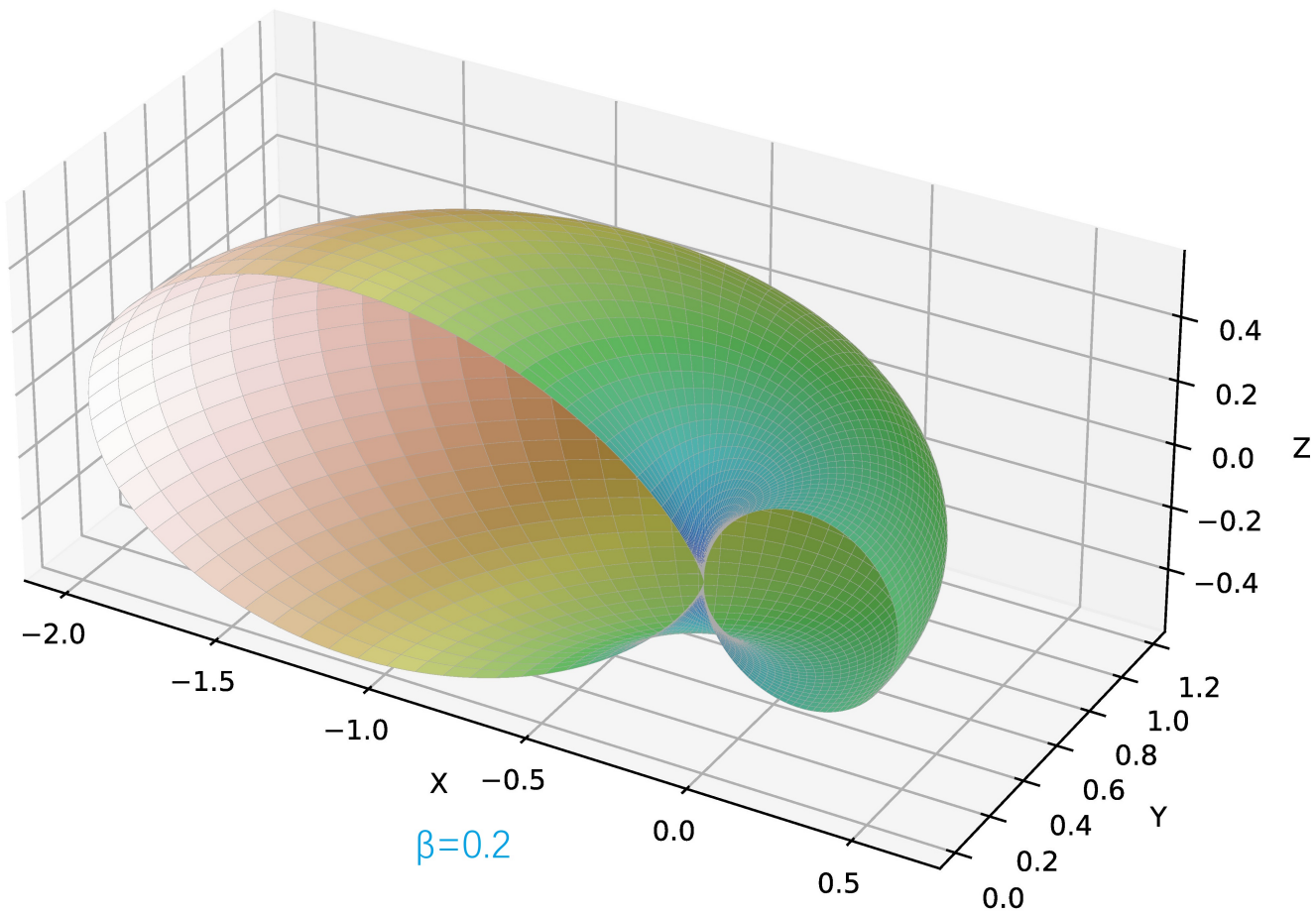


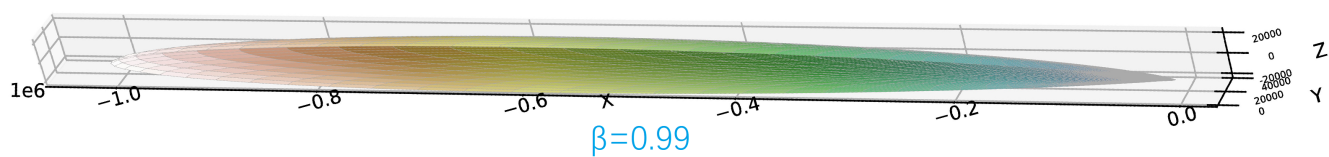
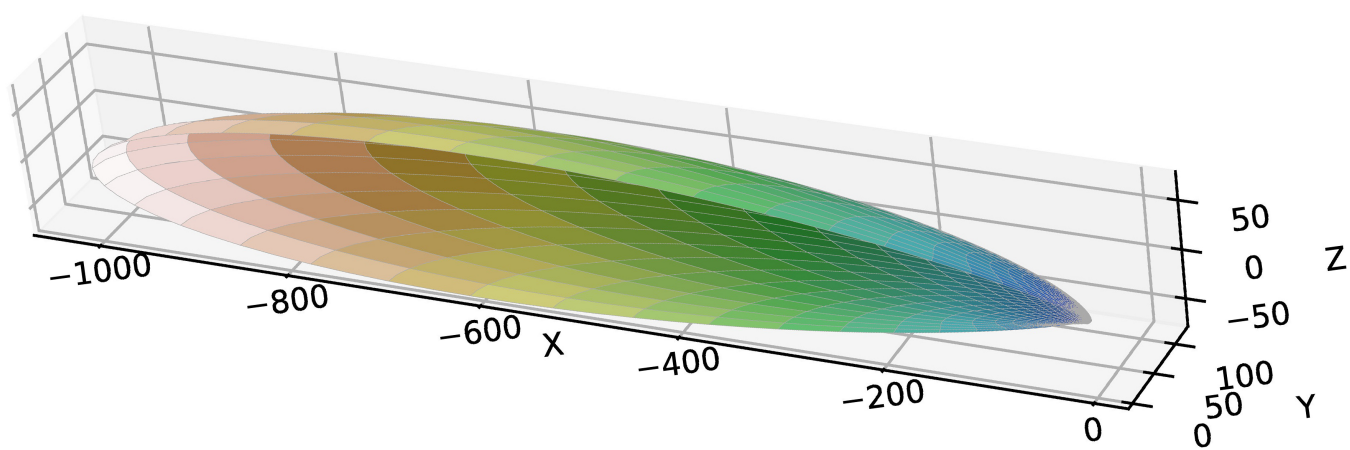
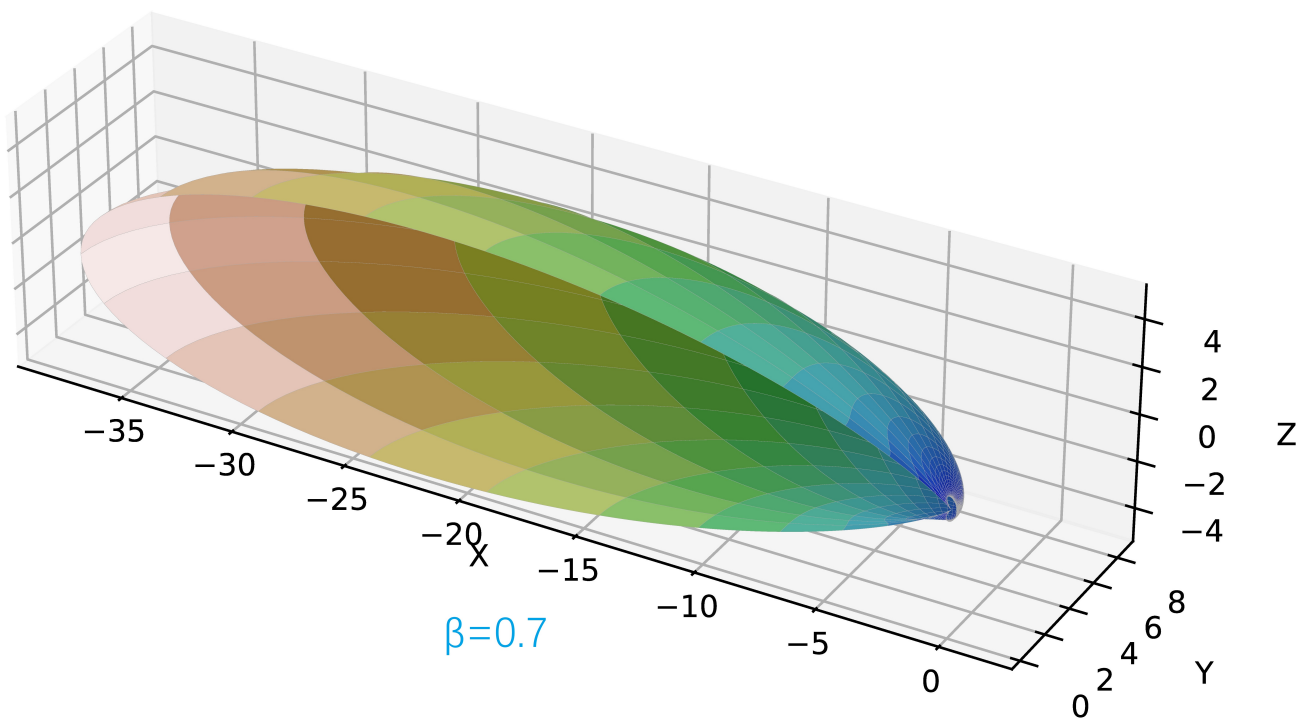




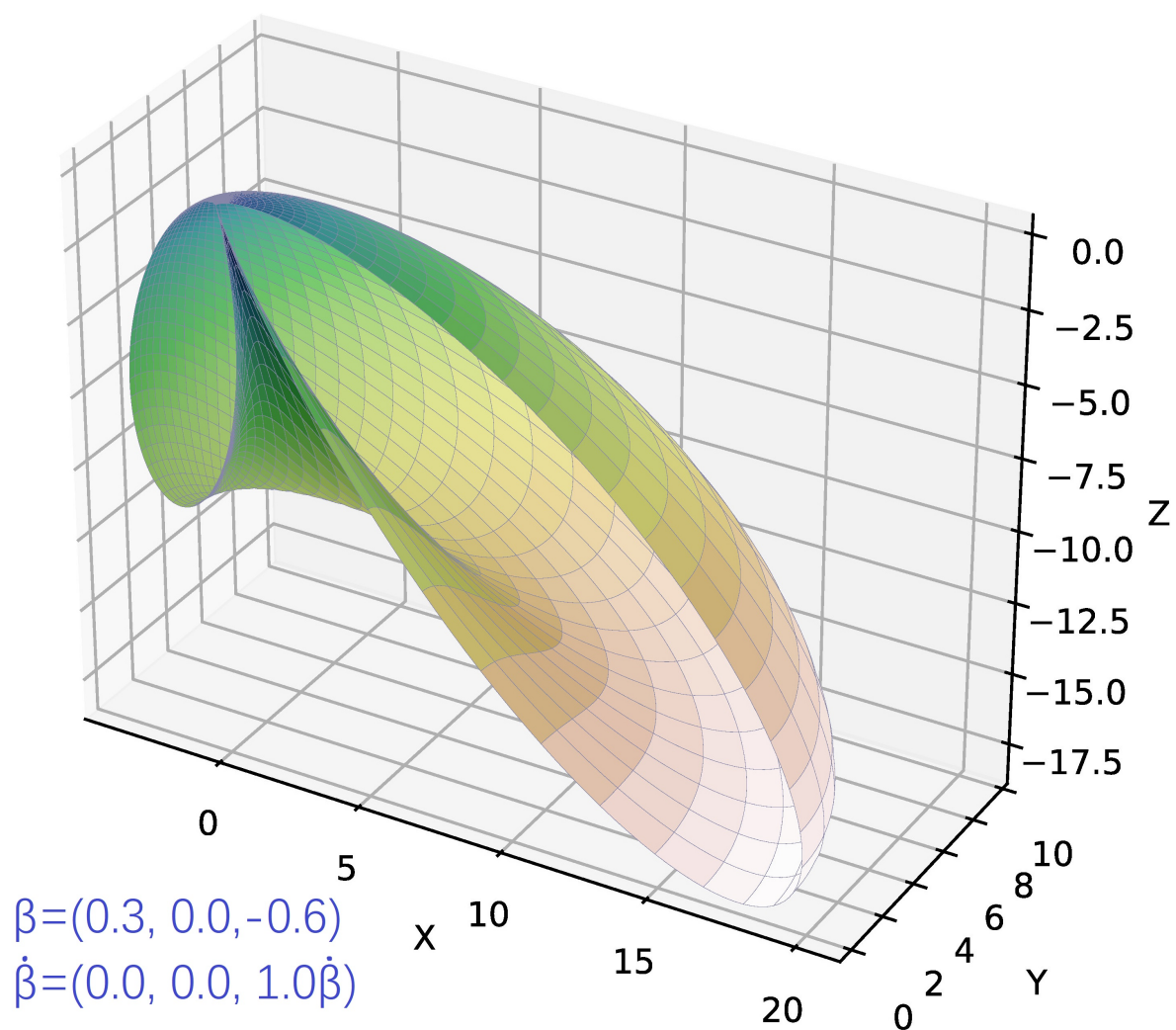
2.3.3 加速度与速度垂直

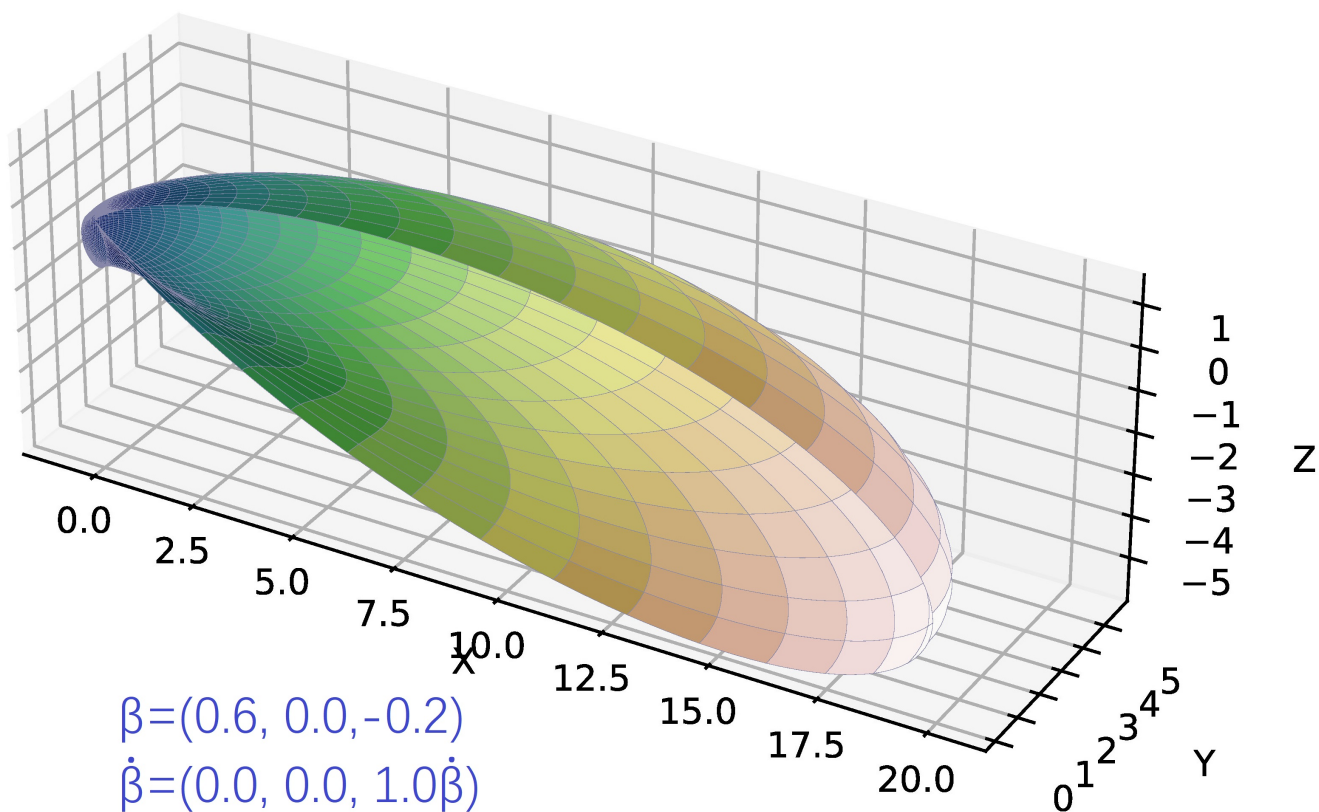
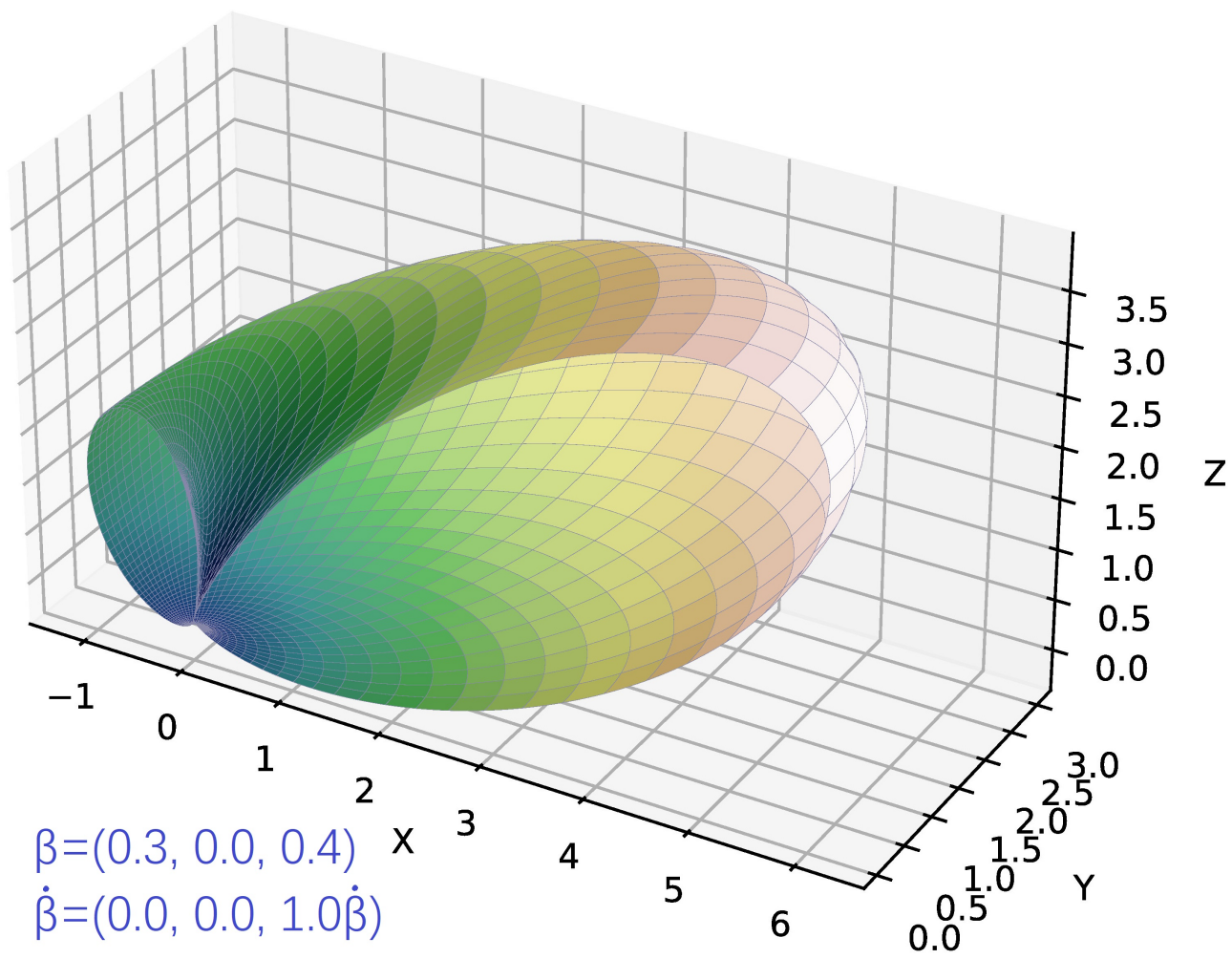
加速度沿 z 轴正方向，速度沿 x 轴负方向。速度矢量 $\boldsymbol{\beta} = -\beta \mathbf{e}_x$ ，其中 β 取 0.2, 0.4, 0.7, 0.9, 0.99 的五种情况，依次对应如下的五幅辐射角分布图。





2.3.4 一些其他情况





3. 参考文献

[1] 尤峻汉. 天体物理中的辐射机制(第二版)[J], 第七章. 1996.

[2] 郭硕鸿. 电动力学(第三版)[J], 第一章. 2008.

[3] 林伟鹏老师的教导.