数学物理魔法

及格手册

复变函数篇

参宿四星云 编

2023 年 1 月 13 日

参考文献

[1] 黄发朋. 数理方法讲义.

[2] 吴崇试, 高春媛. 数学物理方法.

[3] 吴崇试. 数学物理方法习题指导.

[4] 黄志琦. 数学物理方法简明导论.

[5] 林琼桂. 数学物理方法.

目录

§1 复变函数基础

可导性

若 Δz 以任意方式趋于 0 时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(a+\Delta z)-f(a)}{\Delta z}$恒为一常数，则称 $f(z)$ 在 a 点可导。

解析函数

若 $f(z)$ 在区域 G 内处处可导，则称 $f(z)$ 是 G 内的解析函数。

- 解析函数无穷阶可导

Cauchy-Riemann 条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\qquad \text{其中} f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y). \tag{1}$$

$$f(z)\text{可导（解析）}\iff\begin{cases}\text{Cauchy-Riemann 条件}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}\text{均连续}\end{cases} \tag{2}$$

$u(x,y)$，$v(x,y)$是**调和函数**，即满足二维 Laplace 方程

$$f(z)\text{可导（解析）}\implies\begin{cases}\nabla^2u=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0\\ \nabla^2v=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v=0\end{cases} \tag{3}$$

§2 复变积分

2.1 Cauchy 定理与 Cauchy 积分公式

Cauchy 定理

若 $f(z)$ 在闭曲线 C 包围的闭区域解析，那么（多连通区域亦可）

$$\boxed{\oint_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = 0} \tag{4}$$

有界单连通区域上的解析函数 $f(z)$ 存在原函数 $F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$，$F(z)$ 也称为 $f(z)$ 的不定积分。

Cauchy 积分公式

$f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上是单值解析函数，分段光滑曲线 C 为 $\overline{G}$ 的边界，则有

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^+}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z} \tag{5}$$

推论

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^+}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z \tag{6}$$

2.2 Jordan 引理

小圆弧引理

若 $f(z) \in C\big(U^\circ(a)\big)$，并且在 $\theta_1 \leqslant \arg(z-a) \leqslant \theta_2$ 中，$(z-a)f(z) \rightrightarrows k$ $(|z-a| \to 0)$，则有

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1) \tag{7}$$

大圆弧引理

若 $f(z) \in C\big(U^\circ(\infty)\big)$，并且在 $\theta_1 \leqslant \arg(z-a) \leqslant \theta_2$ 中，$zf(z) \rightrightarrows K$ $(z \to \infty)$，则有

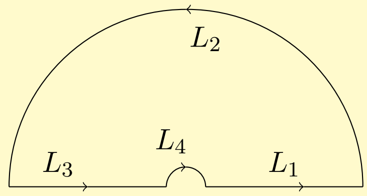
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1). \tag{8}$$

注：大、小圆弧引理中 $K=0$ 或 $k=0$ 非常常用。也有一些不满足一致收敛的情况使得复变积分收敛于 0.

计算菲涅尔积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1-\cos 2x}{2x^2} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1-e^{\mathrm{i}2x}}{2x^2}\right\} \tag{9}$$

设 $g(x) = \dfrac{1-e^{\mathrm{i}2x}}{2x^2}$，计算 $g(x)$ 的围道积分，再用柯西定理。



L_2 大圆弧，设 $x = Re^{\mathrm{i}\theta}$，则有

$$\lim_{R\to\infty} xg(x) = \frac{1-e^{\mathrm{i}2x}}{2x} = \frac{1-e^{-2R\sin\theta}e^{2\mathrm{i}R\cos\theta}}{2x}$$

$$\because \quad \left|e^{-2R\sin\theta}e^{2\mathrm{i}R\cos\theta}\right| \leqslant 1$$

$$\therefore \quad xg(x) \rightrightarrows 0 \ (R\to\infty)$$

由大圆弧引理，$\int_{L_2} g(x)\mathrm{d}x = 0.$

L_4 小圆弧，有

$$\lim_{x\to 0} xg(x) = \frac{1-e^{\mathrm{i}2x}}{2x} = \frac{1-(1+\mathrm{i}2x+o(x))}{2x} = -\mathrm{i}+o(1) = -\mathrm{i}$$

由小圆弧引理，$\int_{L_4} g(x)\mathrm{d}x = -\pi.$

积分路径不包围奇点，由柯西定理，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{L_3+L_1} g(x)\mathrm{d}x = -\int_{L_2+L_4} g(x)\mathrm{d}x = \pi.$$

§3 级数展开

3.1 Taylor 展开

函数 $f(z)$ 在以 a 为圆心的圆 C 内解析，则对 $\forall z\in C$，都可以展开为

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\quad |z-a|<R} \tag{10}$$

系数求法

- Cauchy 积分公式：$c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{L^+}\dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z$，其中 L^+ 为 C 内任一逆时针绕 a 一周的路径。
- 使用常用级数的线性组合、级数乘法、导数、积分、“待定系数法”（仅适用于有限个负幂项或正幂项的情况）。

性质

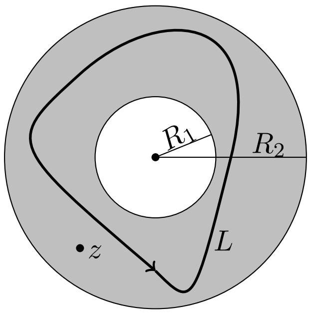
- 展开的形式与实变函数中相同
- Taylor 展开、Laurent 展开都具有唯一性
- $f(z)$ 的奇点完全决定其收敛半径

3.2 Laurent 展开

函数 $f(z)$ 在以 b 为圆心的环形区域 $C:\ R_1<|z-b|<R_2$ 中单值解析，则对 $\forall z\in C$，都可以展开为

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-b)^n,\quad R_1<|z-b|<R_2,} \tag{11}$$

其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{L^+}\dfrac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\mathrm{d}z$，$L^+$ 为 C 内任一逆时针绕 a 一周的路径。

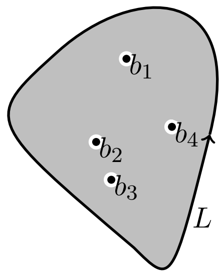


常用技巧：$|z| > 1$ 时的几何级数展开

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1} \\
&= -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\
&= -\frac{1}{z}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)z^{k} \qquad |z|>1
\end{aligned} \tag{12}
$$

§4 留数定理

4.1 留数



围绕解析函数 $f(z)$ 的孤立的 $\forall$ 奇点 b_k 作简单闭合曲线 γ_k，则 $f(z)$ 在 b 点的**留数**定义为

$$\boxed{\mathrm{Res} f(b_k) \equiv \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\gamma_k^+} f(z)\mathrm{d}z = c_{-1}} \tag{14}$$

即 Laurent 展开的 -1 次项系数。

留数定理

若分段光滑简单闭合曲线 L 包围的区域中，除孤立奇点 $b_1, \cdots, b_n$ 外 $f(z)$ 单值解析，那么

$$\boxed{\oint_{L^+} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res} f(b_k)} \tag{15}$$

无穷远点的留数

若 ∞ 不是非孤立奇点，那么可以定义

$$\mathrm{Res}\ f(\infty) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z \tag{16}$$

留数和定理

$$\sum_k \mathrm{Res}\ f(z_k) + \mathrm{Res}\ f(\infty) = 0 \tag{17}$$

若 $\dfrac{-1}{t^2} f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ 在 $t = 0$ 点邻域内展开为 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$，则

$$\mathrm{Res}\ f(\infty) = a_{-1} \tag{18}$$

4.2 留数的求法

4.2.1 直接展开法

适用于较简单的分式、基本函数的线性组合等。可能需要对含无穷项的展开式使用几何级数展开等。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z-\frac{z^3}{3!}+o(z^4)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(\frac{z^2}{3!}+o(z^3)\right)} \\ &= \frac{1}{z}\left(1+\left(\frac{z^2}{3!+o(z^3)}\right)+\left(\frac{z^2}{3!+o(z^3)}\right)+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{z}+\frac{z}{3}+o(z^2)\end{aligned} \tag{19}$$

4.2.2 待定系数法

由于有“有限负幂项或有限正幂项”的限制，一般用来求有限阶极点的留数。

例：求 $\frac{e^z}{\sin^2 z}$ 在 $z=0$ 点的留数

已知

$$\sin^2 z = z^2-\frac{1}{3}z^4+o(z^5),\ e^z = 1+x+o(x), \tag{20}$$

初步判断 $z=0$ 为 2 阶极点，设

$$\frac{e^z}{\sin^2 z} = c_{-2}\frac{1}{z^2}+c_{-1}\frac{1}{z}+c_0+c_1z+o(z) \tag{21}$$

则有

$$\left(c_{-2}\frac{1}{z^2}+c_{-1}\frac{1}{z}+c_0+c_1z+o(z)\right)\left(z^2-\frac{1}{3}z^4+o(z^5)\right) = 1+z+o(z) \tag{22}$$

对比 z 项系数，得到 $c_{-1}=1$.

4.2.3 画小圈圈法

作 $f(z)$ 的某单值解析域 G 内的简单闭合曲线 γ，使 γ 只围绕奇点 b，则

$$\mathrm{Res}f(b) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\gamma^+} f(z)\mathrm{d}z \tag{23}$$

4.2.4 大圆量级法

若 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 且 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 展开后的最高次项分别为 $a_{n-1}z^{n-1}$ 与 b_nz^n，且展开式在全复平面（或给定大小的圆之外）收敛，则 $f(z)$ 在所有孤立奇点的留数之和为：

$$\boxed{\sum \text{Res } z_k=\frac{a_{n-1}}{b_n}} \tag{24}$$

（求除无穷原点外的所有奇点的留数和亦可使用“留数和定理”）

4.2.5 升幂极限法

若 $z=b$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，即 $f(z)=\sum\limits_{k=-m}^{\infty}c_k(z-b)^k$.

- 当 $m=1$,

$$\boxed{\text{Res}f(b)=\lim_{z\to b}(z-b)f(z)} \tag{25}$$

- 当 $m>1$, $(z-b)^mf(z)=\sum\limits_{k=-m}^{\infty}c_k(z-b)^{k-m}$ 只有正项级数和常数项，对其求 $m-1$ 次导数后，常数项变为 $c_{-1}(m-1)!$.

例：求 $\dfrac{1}{(e^z-1)^2}$ 在 $z=0$ 点的留数

初步判断 $z=0$ 为 2 阶极点。

$$z^2f(z)=\frac{z^2}{(e^z-1)^2}=c_{-2}+zc_{-1}+z^2c_0+\cdots \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\left(z^2f(z)\right)'&=\frac{2z(e^z-1)^2-z^2(e^z-1)\cdot 2e^z}{(e^z-1)^4}\\&=\frac{2z}{(e^z-1)^3}(e^z-1-ze^z)\\&=c_{-1}+2zc_0+3z^2c_1+\cdots\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\text{则}\lim_{z\to 0}\left(z^2f(z)\right)'&=2\cdot\frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}\\&=2\cdot\frac{z+\frac{1}{2}z^2+o(z^2)-z-z^2+o(z^2)}{(z+o(z))^2}\\&=2\cdot\frac{-\frac{1}{2}z^2+o(z^2)}{z^2+o(z^2)}\\&=-1\end{aligned} \tag{28}$$

4.2.6 洛必达法

若 $z=b$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，且 $f(z)$ 可写为 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，则

$$\boxed{\mathrm{Res}f(b)=\frac{P(b)}{Q'(b)}} \tag{29}$$

4.3 鞍点近似法

鞍点近似法（又称拉普拉斯方法、最速下降法）在此处仅作最简单介绍。用于近似计算形如

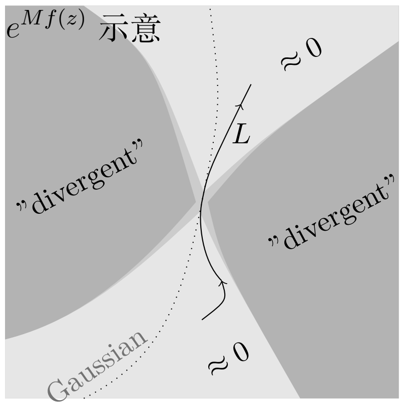
$$I(M)=\int_L g(z)e^{Mf(z)}\mathrm{d}z \tag{30}$$

的积分，且满足 M 很大，$g(z)$（在 z_0 点）变化缓慢，积分路径经过解析函数 $f(z)$ 的**实部的鞍点** z_0 且基本沿着最速下降线，积分的主要贡献来自 z_0 的邻域。近似公式为：

$$I(M)=g(z_0)e^{Mf(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{M|f''(z_0)|}} \tag{31}$$

证明如下：

$$\begin{aligned}
I(M)&=\int_L g(z)e^{Mf(z)}\mathrm{d}z\\
\text{（鞍点处泰勒展开）}\quad&\approx\int_L \mathrm{d}z g(z)e^{M\left[f(z_0)+\frac{(z-z_0)^2}{2}f''(z_0)\right]}\\
&=e^{Mf(z_0)}\int_L \mathrm{d}z g(z)e^{M\frac{(z-z_0)^2}{2}f''(z_0)}\\
\text{（主要贡献为 } z_0 \text{ 的邻域）}\quad&\approx e^{Mf(z_0)}\int_{z_0-\epsilon}^{z_0+\epsilon}\mathrm{d}z g(z)e^{-M\frac{(z-z_0)^2}{2}\left|f''(z_0)\right|}\\
\text{（高斯积分）}\quad&\approx g(z_0)e^{Mf(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{M|f''(z_0)|}}
\end{aligned}$$



附录

A. 多值函数

多值函数（例）

$$\sqrt{z-a}=\begin{cases}\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\theta}\\-\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\theta}\end{cases}\tag{32a}$$

$$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z\tag{32b}$$

$$\arcsin,\arccos,\arctan,z^{\alpha},\cdots$$

宗量

宗量为引起多值性的含自变量的表达式，不完全等同于自变量。如根号下的表达式、ln() 内的表达式。

支点

对于 $f(z)$ 的定义域 C，若存在 $z_0\in C$，当自变量 z 连续地绕 z_0 转一圈回到原来的位置时，$f(z)$ 的值不还原，则称 z_0 为 $f(z)$ 的支点（branch point，又称枝点、分支点等）。

Riemann 面

若宗量辐角变化 n 个周期后 $f(z)$ 的值才还原，则可认为宗量在 n 叶 Riemann 面上。一些情况下，Riemann 面上的每个点通过多值函数 f 可与复平面上的点一一对应。其中，$\sqrt{z-a}$ 的 Riemann 面是二叶的，$\ln z$ 的 Riemann 面是无穷叶的。

单值分支

将 Riemann 面沿连接两个支点的简单曲线割开，就得到若干个几乎完整的复平面，每个复平面就是一个单值分支，可以通过定义的方式，使得 $f(z)$ 在每个单值分支上都是单值函数。

B. Γ 函数

Γ 函数的定义

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}\ z > 0 \tag{33}$$

B 函数的定义

$$\mathrm{B}(p,q) \equiv \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}\ p, \mathrm{Re}\ q > 0 \tag{34}$$

基本性质

$$\text{收敛域：}\ \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\cdots\} \tag{35a}$$

$$\Gamma(z+1) = z\cdot\Gamma(z), \quad \Gamma(n+1) = n! \tag{35b}$$

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \mathrm{B}(z,1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{35c}$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \tag{35d}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{35e}$$

$$\mathrm{Res}\ \Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{35f}$$

$$\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{35g}$$

Stirling 公式

当 $x \gg 1$, Γ 函数的近似公式为

$$\Gamma(x+1) = x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \tag{36a}$$

$$\ln(n!) \sim n\ln n - n \tag{36b}$$

不难证明：

$$\int_0^{\infty} e^{t^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \tag{37a}$$

$$\int_0^{\infty} e^{\pm it^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)e^{\mp\frac{i\pi}{2n}} \tag{37b}$$

用 Γ 函数推导 n 维球体积的 R^n 项系数

设 n 维球：$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant R^2$

且 $V_n=C_nR^n$，其中 C_n 是只与 n 有关的数，

对上式微分，得到

$$\mathrm{d}V_n=C_n\mathrm{d}R^n=C_nnR^{n-1}\mathrm{d}R \tag{38}$$

另外，有（高斯积分、Γ 函数的重要性质）

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \xlongequal[\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x]{t=x^2} \int_0^{\infty}e^{-x^2}\frac{2x\mathrm{d}x}{x}=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi} \tag{39}$$

所以

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\pi}\right)^n&=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^n\\&=\int\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\&=\int e^{-R^2}\mathrm{d}V_n\\&=C_nn\int_0^{\infty}e^{-R^2}R^{n-1}\mathrm{d}R\\&\xlongequal[\mathrm{d}R=\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t]{R=\sqrt{t}} C_n\frac{n}{2}\int_0^{\infty}e^{-t}1t^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}t\quad=C_n\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\end{aligned} \tag{40}$$

$$\Longrightarrow\quad C_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{41}$$

用 B 函数证明 Wallis 公式的一个中间结果

$$\text{Wallis 公式：}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{\pi}{2} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta &\xlongequal[\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}]{t=\sin\theta}\int_0^1\frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\xlongequal[\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}]{u=t^2}\frac{1}{2}\int_0^1u^{\frac{n-1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\\&=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n=2k+1,\quad k\in\mathbb{Z}^+\\[2ex]\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & n=2k,\qquad k\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\end{aligned} \tag{43}$$

以下略。