



— 广东实验中学天文社 —



**DO NOT GO GENTLE
INTO THAT GOOD NIGHT.**

恒星物理

21305837 黄日

2023 秋

授课老师 中大物天 张泳

主要参考资料

- 黄润乾《恒星物理》部分内容
- 李焱《恒星结构演化引论》部分内容
- Jorgen Christensen-Dalsgaard, stellar structure and evolution (Lecture Notes)
- R. Kippenhahn et al., Stellar Structure and Evolution
- William K. Rose, Advanced Stellar Astrophysics

恒星观测特性.

— M 质量

— L 光度 Luminosity, 即功率.

$$L = \int_0^\infty L_\lambda d\lambda$$

恒星辐射流量 $F = \frac{L}{4\pi d^2}$ 依核距离.

— R 半径 radius

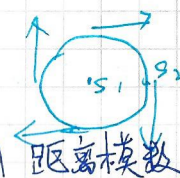
— T_{eff} 有效温度

依核 $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$

Stefan-Boltzmann constant.

— μ proper motion 自行.

常用单位: arcsec/year.



光谱型 (双星) 得到 恒星质量

— $m-M$ 距离模数

$$M - m = -2.5 \log \frac{F_0}{F_d} = 5 - 5 \log d$$

— $A(b, l, d)$

星际消光修正

colors of the stars 色温度 $\xrightarrow{\text{代替}} T_{\text{eff}}$

• color index: 单色星等 常用 UBVRI 系统

$$U-B = m_U - m_B$$

$$B-V = m_B - m_V$$

U: ultra violet

B: blue

V: visual

R: red

I: infrared

Spectrum

He II

(B2 max) He I

(A0 max) H

(G max) Ca II (other ionized metals)

neutral metals

Molecules (TiO, CN, CH)

① 激发温度 (Excitation Temperature)

$$\frac{n_{r,k}}{n_{r,i}} = \frac{g_{r,k}}{g_{r,i}} \exp\left(-\frac{E_{r,k} - E_{r,i}}{k_B T}\right)$$

② 电离温度 (Ionization Temp.)

Saha 公式:

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{G_{r+1}}{G_r} g_0 \left(\frac{2\pi m_e k T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\chi_r}{k T}\right)$$

r 次电离原子的配分函数

Note: color-color diagram 指两种色指数的关系图
巴尔末跳变

质光关系 $L \propto M^n$ ($n > 1$ 说明 寿命与质量负相关)

metallicity 金属丰度 (Z)

Composition parameterized with X, Y, Z.

mass fraction of H, He, oth. elements.

e.g. $X_0, Y_0, Z_0 = 0.747, 0.236, 0.017$

Note: $[O/Fe]$ 表示 $\lg \frac{M(O)/M(Fe)}{M_0(O)/M_0(Fe)}$

③ 星族

星族 I $Z \sim 0.5 - 1 Z_0$

(POP I) 盘面、旋臂、疏散星团, 年轻

星族 II $Z \sim 0.1 - 0.5 Z_0$

(POP II) 银晕 年老

POP II ?

● 星团 Cluster

—— 疏散星团 open cluster
年轻、易散

—— 球状星团 globular cluster
靠引力束缚，不易散。
一般年老

properties: t & Z 一致
距离几乎相同

(注: 星团的单星族模型受到挑战)

turn-off 点 预示星团年龄

恒星的时标

—— 动力学时标. t_{dym} 一个球体由引力自由坍塌
$$t_{\text{dym}} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

推导: $a = -\frac{GM}{r^2} = \frac{dr}{dt^2}$
更好算的方法: $\frac{1}{2}mv^2 = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$

—— 热时标 (KH 时标) t_{KH}
若内部核反应停止, 恒星 (维持光度)
靠引力能的时标。

$$t_{\text{KH}} = \frac{U}{L} = \frac{GM^2}{RL}$$

意义: 原恒星 $\rightarrow$ 开始核反应 (主序前演化)
太阳: 30 Myr

—— 核时标. $t_{\text{nuc}} = \frac{qXMc^2}{L}$

恒星消耗核能的时标 (维持光度),
 q 为氢质量亏损的质量占比, ($\sim 0.7\%$)
 X 为参与反应的质量占比 ($\sim 10\%$)

太阳: 10 Gyr

恒星模型基本假设 (简化)

球对称、离心力 $\ll P, g$.

假定: 引力 = 压强.

恒星结构演化的坐标系 (径向).

—— 欧拉描述

$\longrightarrow r$ $0 \rightarrow R$, R 为时间的函数

—— 拉格朗日描述 更方便?

$\longrightarrow m$ $0 \rightarrow M$, M 与时间几乎无关.

基本方程

1° 质量分布

2° 流体静力学平衡

3° 能量平衡:

4° 能量转移: 能量流 (辐射、对流) 与温度梯度

补充方程

物态方程 (T, ρ, P)

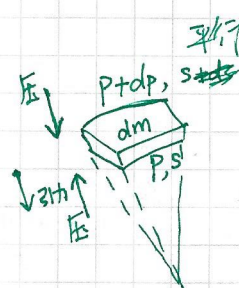
不透明度

核反应能量产率 (唯一含时方程)

质量分布方程

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

流体静力学平衡方程



平行板假设 $dm = \rho(r) \cdot s \cdot dr$

引力: $\frac{GM(r)}{r^2} dm$

压力差: $P(r)s - P(r+dr)s$

$$\Rightarrow \frac{dP(r)}{dr} = - \frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

或 $\frac{dP}{dm} = - \frac{Gm}{4\pi r^4}$

理想气体物态方程

压强 $\left\{ \begin{array}{l} \text{气体压强 } P_g \\ \text{电子压 } P_e \\ \text{离子压 } P_i \\ \text{辐射压 } P_r \end{array} \right\} P = \frac{\rho}{\mu m_u} kT$

平均粒子质量

Note: $\mu(\text{电离 } ^1\text{H}) = 0.5 < \frac{4}{3} = \mu(\text{电离 } ^4\text{He})$

Tips: 由 $\mu = \frac{\sum X_i \mu_i}{\sum X_i} = \frac{\sum X_i \mu_i}{\sum X_i}$, $\mu_i = \frac{X_i \mu_i}{\sum X_i \mu_i}$

分子分数 质量分数

可得 $\frac{1}{\mu} = \sum \frac{m_i}{\mu_i}$ (电子丰度相加)

位力定理

静力学平衡
仅理想气体 $\} \rightarrow E_{gr} = -2E_{in}$

有 $\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$

凑 $4\pi r^3 dP = -\frac{Gm}{r} dm$

$\int_0^M \frac{4}{3}\pi r^3 dP = -\frac{1}{3} \int_0^M \frac{Gm}{r} dm \quad E_{gr} = \int_0^M -\frac{Gm}{r} dm$

即 $\int_{P_c}^{P_s} V dP = \frac{1}{3} E_{gr}$

LHS = $[V \cdot P]_{P_c}^{P_s} - \int_{V_c}^{V_s} P dV = 0 - \int_{V_c}^{V_s} P dV$
例如辐射压

所以 $E_{gr} = -3 \int_0^{V_s} P dV$

$\begin{cases} P = nkT \\ u = \frac{3}{2}nkT \end{cases}$ (非相对论理想气体)
内能

相对论: $u = 3P$,
 $E_{gr} = -E_{in}$,
 $E = 0$
恒星质量上限!

恒星坍缩, 一半能量转换为内能, 另一半辐射出去

剩余总能量 $E = E_{gr} + E_{in} = \frac{1}{2} E_{gr}$

推论:

只由引力产生辐射的恒星光度与收缩速率的关系

$L_G = -\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R^2} \frac{dR}{dt}$

Tip: 检验模型是否适用: 恒星内部为什么是气体?

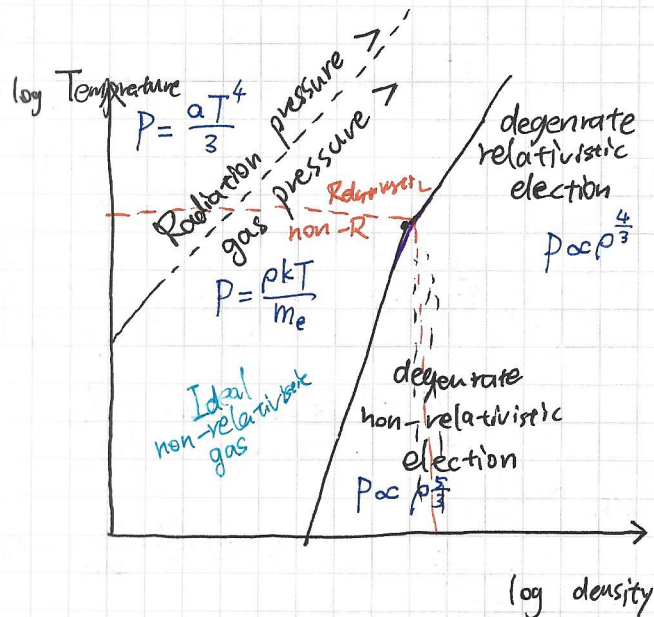
即: 粒子相互作用能 $\ll$ 粒子动能

辐射压与恒星质量

辐射压 $P_r = \frac{1}{3} u \propto T^4$ ($\frac{1}{3} a T^4$)

流体静力学压强 $P_g \propto \rho T$ ($\rho \frac{kT}{\mu m_u}$)
(理想气体压强)

$\Rightarrow \frac{P_r}{P_g} \sim \frac{T^3}{\rho} \sim \frac{T^3 R^3}{M} \sim M^2$



自由电子简并压. ($g=2$, 自旋)

非相对论情形,

极端相对论情形,

电子的数密度 (仅对动量积分)

$$n = \int_0^{p_0} \frac{2}{h^3} \cdot 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_0^3$$

$$\text{即 } p_0 = \left(\frac{3h^3 n}{8\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

压强

$$P = \int_0^{p_0} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 \left[\frac{1}{3} p v \right] dp$$

$$= \int_0^{p_0} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 \frac{p^2}{3m_e} dp$$

$$= \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{20m_e} n^{\frac{5}{3}}$$

$$= \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{20m_e} \left(\frac{\rho}{m_H \mu_e} \right)^{\frac{5}{3}}$$

压强

$$P = \int_0^{p_0} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 \cdot \frac{1}{3} p c dp$$

$$= \int_0^{p_0} \frac{8\pi c}{3h^3} p^3 dp$$

$$= \frac{2\pi c}{3h^3} \left(\frac{3h^3 n}{8\pi} \right)^{\frac{4}{3}}$$

$$= \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{hc}{8} \left(\frac{\rho}{m_H \mu_e} \right)^{\frac{4}{3}}$$

由此可知, $P_{NR} \sim \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{\frac{5}{3}}$

极端相对论情形 $P_R \sim \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{\frac{4}{3}}$

粗略分界: $\frac{p_0^2}{2m_e} \sim m_e c^2$

$$\int_0^p \int_{2\pi} f(p) dp \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot v \cos\theta d\sigma$$

动量大小、方向
一定的电子数
截面投影
单位时间通过面积

单位时间通过数量

单位时间动量变化 (力)

压强

达到简并态的判定: $n^{\frac{1}{3}} \ll \lambda_D = \frac{h}{p}$

粒子间距 德布罗意波长

即 $\begin{cases} \text{non-R: } n \gg \left(\frac{mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ 或 } kT \sim \frac{p^2}{m} \\ \text{R: } n \gg \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \text{ 或 } kT \sim pc \end{cases}$

太阳内部: $H \rightarrow He$, 恒星收缩, $\rho \uparrow$, $T \uparrow$

那么, 非简并 $\rightarrow$ 简并 $\rightarrow He$ 点燃

变为 壳层 H 燃烧 氢闪 进入水平分支 (He 主序支)

定义 $\Gamma_c = \frac{\text{电势能}}{\text{热动能}} \approx \frac{\frac{e^2}{r}}{\frac{3}{2}kT} \sim \frac{e^2 n^{\frac{1}{3}}}{kT} \approx 2 \times 10^3 \frac{n^{\frac{1}{3}}}{T} \text{ (cgs)}$

$\Gamma_c \ll 1$: 气体 $\Gamma_c \gg 1$ (~ 100) 结晶态

中子化 (neutronization)

电子、质子能量足够高时, 产生中子 (P_{16} 内核模型 SNh)

$(E_k + m_p + m_e) > m_n$

理想气体 (非简并) 与辐射场的混合系统的状态方程. $(P_g = \frac{\rho}{\mu m_u} kT, P_r = \frac{1}{3} aT^4)$

内能密度 $u = \frac{3}{2} P_g + 3 P_r = \frac{\rho}{\mu m_u} (\frac{3}{2} kT) + aT^4$

单位质量的内能 $U = \frac{u}{\rho}$

单位质量的体积 $V = \frac{1}{\rho}$

$\Rightarrow U = \frac{1}{\mu m_u} (\frac{3}{2} kT) + aT^4 V$

绝热过程 $dQ = 0 = dU + p dV$

$= (\frac{\partial U}{\partial T})_V dT + (\frac{\partial U}{\partial V})_T dV + p dV$

$= (\frac{\partial U}{\partial T})_V dT + [(\frac{\partial U}{\partial V})_T + p] dV$

$= (4aT^3 V + \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{\mu m_u}) dT + (\frac{4}{3} aT^4 + \frac{k}{\mu m_u} \cdot \frac{T}{V}) dV$

1° 理想气体: $pV^\gamma = \text{const.}$ 2° 理想气体 + 辐射场

$-\gamma = \frac{\partial \ln p}{\partial \ln V}|_S$

$\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{\partial \ln p}{\partial \ln T}|_S$

$-\gamma+1 = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln V}|_S$

$-\gamma_1 = \frac{\partial \ln p}{\partial \ln V}|_S$ 稳定斜 $\gamma_1 > \frac{4}{3}$

推广 $\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1} = \frac{\partial \ln p}{\partial \ln T}|_S$

$-\gamma_3+1 = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln V}|_S$

注: 仅适用于完全电离区或中性区 (未考虑电离能)

Saha 公式

$\frac{N_{j+1}}{N_j} = \frac{2 Z_{j+1}}{n_e Z_j} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_j}{kT}}$

j 次电离系数 $\underbrace{\quad}_{\text{配分函数}} Z_j = \underbrace{g_0 + \sum_n g_n e^{-\frac{\chi_n}{kT}}}_{\text{简并度}} \approx g_0$

推导:

由 $\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} e^{-\frac{\Delta E_{ij}}{kT}}$ 出发

$\Delta E_{ij} = \chi_I + \frac{1}{2} m_e v^2$, 那么

$\frac{dN_0^+(v)}{N_0} = \frac{g_0^+ g_e(v)}{g_0} e^{-\frac{\chi_I + \frac{1}{2} m_e v^2}{kT}}$

其中 $g_e(v) = \frac{2}{h^3} d^3x d^3p = \frac{2}{h^3} V \cdot 4\pi m^3 v^2 dv$

$\frac{Z_{i+1}}{Z_i} \approx \frac{g_0^{i+1}}{g_0^{i+1}} = \frac{8\pi}{h^3} \cdot \frac{1}{N_e} \cdot m^3 \cdot v^2 dv$

两边积分, 得到

$\frac{N_{j+1} N_e}{N_j} = 2 \frac{Z_{j+1}}{Z_j} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_j}{kT}}$

N_j 取中 (2H), N_{j+1} 取 H^+

那么 $\frac{N^+ N_e}{N} = 2 \frac{Z^+(T)}{Z(T)} \lambda^3 e^{-\frac{\chi_I}{kT}} \approx \lambda^3 e^{-\frac{\chi_I}{kT}}$

12 (单原子 $\gamma = \frac{5}{3}$) = $\frac{C_p}{C_v}$

恒星的熵 (电离气体和辐射)

1° 理想气体

$$TdS_g = C_v dT + PdV = \frac{3}{2} Nk dT + Pd\left(\frac{N}{n}\right)$$

$$= N \left[\frac{3}{2} k dT + Pd\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$\text{所以 } dS_g = N \left[\frac{3}{2} k \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} d\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= N \left[\frac{3}{2} k d(\ln T) + nk d\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= Nk \left[d(\ln T^{\frac{3}{2}}) + d(\ln \frac{1}{n}) \right]$$

$$= Nk d\left(\ln \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n}\right)$$

2° 辐射

$$TdS_r = dU + PdV = d(aT^4 V) + \frac{1}{3} aT^4 dV$$

$$= a \left(4T^3 V dT + \frac{4}{3} aT^4 dV \right)$$

$$\text{所以 } dS_r = d\left(\frac{4}{3} aT^3 V\right)$$

$$\text{综合二者, 单位体积的熵 } s_r = \frac{S_g + S_r}{V} = nk \ln\left(\frac{T^{\frac{3}{2}}}{n}\right) + \frac{4}{3} aT^3$$

+ const.

$$\text{讨论: } S \sim \ln p^{-\frac{1}{2}} \sim \ln T^{-\frac{3}{2}}$$

主序前坍缩、主序燃烧, 熵均减小!

$$\text{所以位力定理 } \frac{M}{2\mu m_H} kT \sim \frac{1}{2} \frac{GM^2}{R}$$

$$\text{多方模型: } P = K \rho^\gamma, \text{ 多方指数 } n = \frac{1}{\gamma-1} \left(\gamma = 1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$K = N_n G \cdot M^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}}$$

1° non-R Ideal gas

$$P_e \sim \rho^{\frac{5}{2}}, n = \frac{3}{2}$$

2° R Ideal gas

$$P_e \sim \rho^{\frac{4}{3}}, n = 3$$

3° 特大质量恒星 ($P \approx P_r$)

$$P \sim T^4$$

4° 等温核 $T = \text{const.}$

$$P \propto \rho, n = \infty$$

5° 全对流恒星: 红巨星, 褐矮星, $n = \frac{3}{2}$

6° 中子星 $n = 0.5 \sim 1$

7° 不可压缩物质 $n = 0$

8° 极端相对论白矮星 $n = 3 (P \sim \rho^{4/3})$

Lane-Emden 方程

流体静力学平衡

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

其中 $m(r) = \int_0^r 4\pi \rho(x)x^2 dx$

多方方程 $P = K\rho^\gamma, \gamma = \frac{n+1}{n}$

Lane-Emden 方程

$$\theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' + \theta^n = 0$$

其中密度变量 θ 定义:

$$\rho = \rho_0 \theta^n$$

矢径坐标 ξ 定义:

$$r = a\xi$$

$$a = \sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G}} \rho_0^{\frac{1}{n}-1}$$

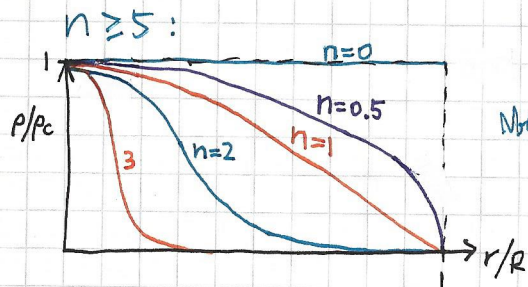
结论: Lane-Emden eq. 只有在 $n=0, 1, 5$ 时有解析解:

$n=0: \theta = 1 - \frac{1}{6}\xi^2, \xi_1 = \sqrt{6}$

$n=1: \theta = \frac{\sin \xi}{\xi}, \xi_1 = \pi$

$n=5: \theta = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\xi^2}, \xi_1 = \infty$

$\xi_1 = \infty$



Note: n 唯一决定密度分布!

Lane-Emden eq. $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{半径 } R = R(\rho_0) \\ \text{质量 } M = M(\rho_0) \end{cases}$
(n 定则 ξ_1 定)

消去 ρ_0 $\Rightarrow$ 质量-半径关系 $M \sim R^{\frac{3-n}{1-n}}$

$$M = 4\pi R^3 \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{n-1}} \xi_1^{\frac{n+1}{n-1}} \left| \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi_1}$$

$n=3$ 时 M 仅与 K 有关.

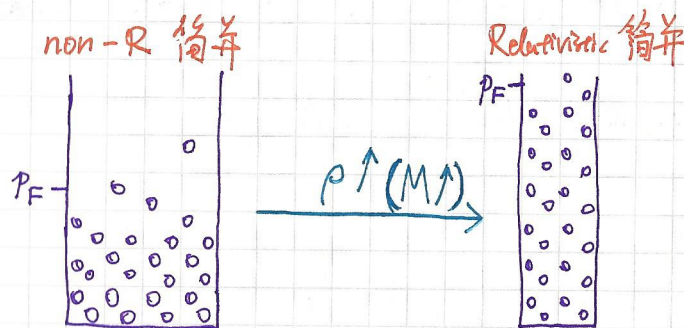
推论:

1° non-R 电子简并 $\rightarrow n=1.5 (\gamma = \frac{5}{3})$

有 $M \sim R^{-3}$, 白矮星 $M \uparrow R \downarrow \rho \uparrow$

2° Relativistic 电子简并 $\rightarrow n=3 (\gamma = \frac{4}{3})$

有 $M \sim \text{const} \sim \text{Chandrasekhar 极限} (\sim 1.46 M_\odot)$



The Chandrasekhar Mass (part 6~7)

P10. 极端相对论电子简并压

$$P = K_2' \cdot \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{\frac{4}{3}}, \quad K_2' = 1.24 \times 10^{15} \text{ (cgs)}$$

P17 质量-半径关系 (n=3 时 R 没了)

$$M = 4\pi \left(\frac{K}{\pi G}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_1^2 \left| \frac{d\theta}{d\xi_1} \right|, \quad K = K_2' \mu_e^{-\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow M_{Ch} = 1.456 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_{\odot}$$

μ_e^{-1} 为电子丰度 (P17)

—— 对 ^{12}C 、 ^{16}O 而言, $\mu_e^{-1} = \frac{1}{2}$,

那么 $M_{Ch} = 1.456 M_{\odot}$ (CO 白矮星)

爱丁顿标准模型 (n=3) 适用: 辐射压重要但不主导
不能对流

$$\alpha \quad \beta = \frac{P_g}{P}, \quad 1 - \beta = \frac{P_r}{P}$$

假设整个星的 β 均一致

$$\text{由 } P_r = \frac{1}{3} a T^4, \quad P_g = n_e k T = \frac{\rho N_A}{\mu_e} k T \quad (\mu_e \text{ 为电子丰度})$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{3P(1-\beta)}{a}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad P = \frac{\rho N_A k T}{\mu_e}$$

$$\Rightarrow \underline{P = \left[\frac{3(N_A k)^4 (1-\beta)}{a(\mu_e)^4}\right]^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}}} \quad \text{即 多方指数 } n=3$$

summary:

$$\beta = \text{const.}$$

理想气体 & 辐射压

$\Rightarrow$ 多方指数 $n=3$.

多方模型下的引力势能 (part 7. problem 2)

$$\text{总 } P = K \rho^{1+\frac{1}{n}}$$

$$\text{受力平衡 } \frac{dP}{dr} = - \frac{d\phi_g}{dr} \rho$$

$$E_{gr} = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm$$

very tricky

$$\text{由 } \int_0^M 4\pi r^2 \frac{\partial \phi}{\partial m} dm \quad \text{分部积分} \therefore$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{boundary condition:} \\ P|_{r=R} = 0, \quad m|_{r=0} = 0 \end{array} \right\} \quad \& \quad \frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad \& \quad \frac{\partial P}{\partial m} = - \frac{Gm}{4\pi r^4}$$

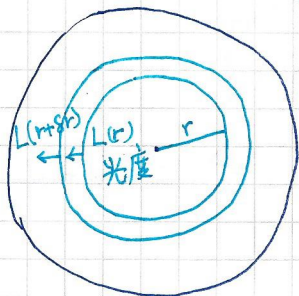
能量平衡方程

近似为静态 ($T, \rho, P, \dots$)

定义 $\epsilon =$ 单位物质 (质量) 产生的功率
 $\epsilon = \epsilon(\rho, T, \{X_i\}, \dots)$

那么任一壳层, 产能 $\epsilon 4\pi r^2 \rho \delta r$

那么平衡方程为 $L(r+\delta r) - L(r) = \epsilon 4\pi r^2 \rho \delta r$
 $\frac{dL(r)}{dr} = \epsilon 4\pi r^2 \rho$



直接使用 $\frac{dr}{dm} = 4\pi r^2 \rho$

得到 $\frac{dL(m)}{dm} = \epsilon$ (拉格朗日描述)

总的平衡方程 $L = \int_0^R \epsilon \rho 4\pi r^2 dr$

能量源 $\epsilon = \epsilon_{\text{nuc}} + \epsilon_{\text{gr}} - \epsilon_{\text{v}}$

能量传递方程 (决定温度梯度)

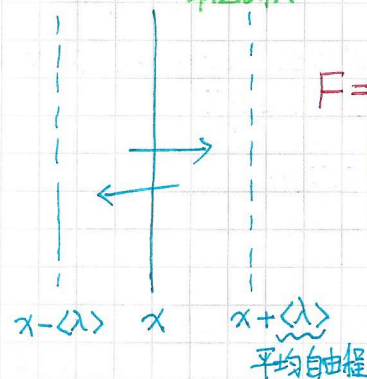
传能方式 $\left\{ \begin{array}{l} \text{对流} \\ \text{辐射} \\ \text{热传导} \end{array} \right.$ 一般忽略 (简并或低密度除外)

热传导, 辐射 (均为粒子碰撞)

均可用 Fick's 方程 F : 单位时间通过 (垂直于能流) 的单位面积的能量通量

$$F = \frac{dQ}{A dt} = -\lambda_e \frac{dT}{dr}$$

单位面积



rate of transport:

$$F = j(x) \approx \frac{1}{6} \langle v \rangle u(x - \langle \lambda \rangle)$$

$$- \frac{1}{6} \langle v \rangle u(x + \langle \lambda \rangle)$$

$$= -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{du}{dx}$$

$$= -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{du}{dT} \frac{dT}{dx}$$

$$= -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle C \frac{dT}{dx}$$

$$= -K \frac{dT}{dx}$$

coefficient of thermal conductivity.
 导热系数

1° 热传导. $u_e = \frac{3}{2} n_e kT$, $C_e = \frac{3}{2} n_e k$, $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}$

$\langle \lambda \rangle_{ei} = \frac{1}{n_i \sigma_{ei}}$ $\sigma \approx \pi R^2$, $\frac{Ze^2}{R} \sim kT$

定义: σ 碰撞截面 (有效交换动量截面)

$\Rightarrow K_e = \frac{k}{2\pi} \left(\frac{n_e}{n_i} \right) \left(\frac{kT}{Ze^2} \right)^2 \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}$ 计算 K_p (电子) 只带
将 m_e 改为 m_p
故 $K_e \gg K_p$

定义: 自由程 λ : 光子移动距离 d ($\ll \lambda$) 时被吸收或散射的概率为 $\frac{d}{\lambda}$, $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$

opacity. 不透明度 κ : 单位质量 (或体积) 对光吸收或散射的 (吸收系数) 截面, $\kappa = \frac{1}{\rho \lambda} = \frac{n\sigma}{\rho}$

κ 越小 ($\rightarrow 0$) 越透明

Note: 太阳内部光子自由程 $\sim \text{cm}$

2° 辐射. $u_r = aT^4$, $C_r = 4aT^3$, $v = c$, $\langle \lambda \rangle = \frac{1}{n_e \sigma_T}$

$\Rightarrow K_r = \frac{aT^3 \cdot c}{2\pi \cdot n_e} \left(\frac{m_e c^2}{e^2} \right)^2$

$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2$ 将电子散射截面作为光子作用截面上限

对于太阳, $\frac{K_r}{K_e} \sim 2 \times 10^5$, 传导可忽略!

$\frac{K_r}{K_e} \sim n_e^{-1}, T^{\frac{1}{2}}$ 传导重要: 低温、高密
• 白矮星内部“等温核”
 $\left(\frac{K_r}{K_e} \approx \frac{ZaT^3}{\sqrt{3}kne} \left(\frac{m_e c^2}{kT} \right)^{\frac{5}{2}} \right)$

已知 $F = -K \frac{dT}{dr}$, $K = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle C = \frac{\langle v \rangle C}{3K\rho}$

对于辐射 ($v=c$, $C=4aT^3$), $K_{\text{rad}} = \frac{4c \cdot aT^3}{3K_{\text{rad}} \rho}$

类似地, 我们定义“传导不透明度” K_{cond} 如下.

$K_{\text{cond}} = \frac{4c \cdot aT^3}{3K_{\text{cond}} \rho}$

那么总流量 $F = F_{\text{rad}} + F_{\text{cond}} = \frac{4c \cdot aT^3}{3K_{\text{tot}} \rho}$

其中定义了总的不透明度 $K_{\text{tot}} = \frac{1}{\frac{1}{K_{\text{rad}}} + \frac{1}{K_{\text{cond}}}}$

仅考虑辐射传热情况下, (太阳 ec.)

$$\begin{cases} j(r) = F(r) = -\frac{4c \cdot aT^3}{3K\rho} \cdot \frac{dT}{dr} \\ L(r) = 4\pi r^2 j(r) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 能量转移方程 (能量传递公式)

$\frac{dT}{dr} = -\frac{3K\rho}{4aT^3} \cdot \frac{L(r)}{4\pi r^2}$ 或 $\frac{dT}{dm} = -\frac{3K}{64\pi^2 a c T^3} \cdot \frac{L(r)}{r^4}$

—— 平均不透明度 $\bar{\kappa}$.

我们重新考虑 $j = -\frac{1}{3} c \langle \lambda \rangle \frac{du}{dr}$.

$$j = \int j_\nu d\nu$$

$$= \int -\frac{1}{3} c \cdot \frac{1}{\rho \kappa_\nu} \cdot \frac{du_\nu}{dr} d\nu$$

此处 $u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$
普朗克函数

再结合 $j = -\frac{1}{3} c \cdot \frac{1}{\rho \bar{\kappa}} \cdot \frac{du}{dr}$

此处 $u = aT^4$ $B(T) = \frac{c}{4\pi} u$

可推得 $\frac{1}{\bar{\kappa}} \frac{dB(T)}{dT} = \int \frac{1}{\kappa} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu$

即 $\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\pi}{a c T^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu$

—— ● 罗斯兰平均 (Rossland mean opacity)

若 $\kappa_\nu \propto \nu^{-n}$

那么 $\bar{\kappa} \propto T^{-n}$

—— ● Kramers 近似 (free-free & bound-free)

$\kappa \approx \kappa_0 \rho T^{-3.5}$

不透明度的产生机制.

1. 光子与原子 (中的电子) 作用.

● bound-bound transitions (光致激发)

● bound-free transitions (光致电离)

● free-free transitions (韧致辐射的逆过程)

→ Kramers 近似 $\kappa \approx \kappa_0 \rho T^{-3.5}$

2. 自由电子的 Thomson 散射 (Compton 散射低能近似)

散射前后光子 ν 不变.

常数 $\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2$ (电子散射截面)

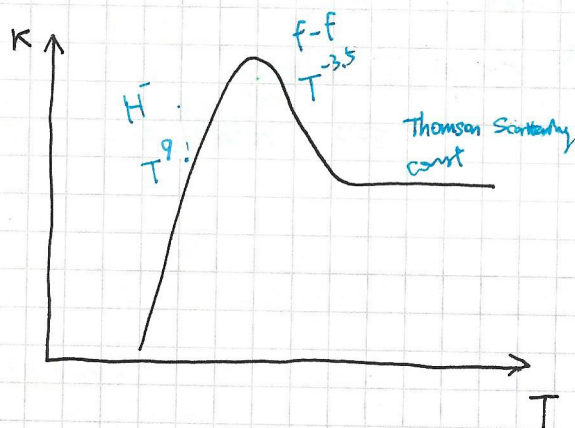
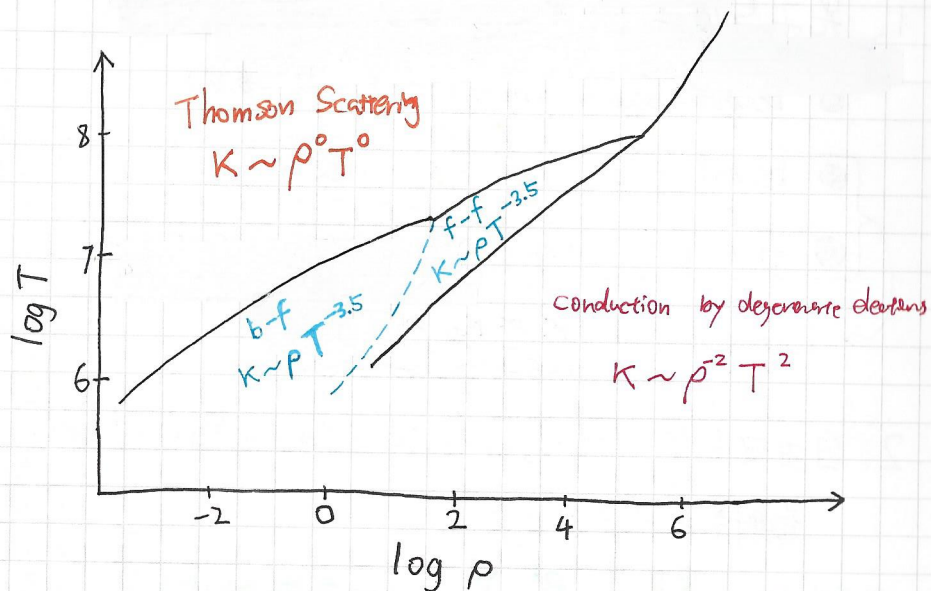
$\kappa = \frac{n_e \sigma_e}{\rho} \sim \rho^0 T^0 (1+X)$
H 占质量比.

3. 负氢离子 (H^- 的第一电离能 $\sim 0.75 \text{ eV}$)

产生条件, 有 H 与金属存在, 温度适中 ($4000 \sim 8000 \text{ K}$)
或 $3000 \sim 6000 \text{ K}$.
电离出自由电子.

$\kappa \sim \rho^{\frac{1}{2}} T^9 \frac{Z}{Z < 0.02 \text{ 时}}$

不透明度主导因素



应用: 白矮星的冷却.

能量传递方程: $\frac{dT}{dr} = -\frac{3KP}{16\pi acT^3} \cdot \frac{L}{r^2}$ ①

静力学平衡: $\frac{dP}{dr} = -G \frac{M\rho}{r^2}$ ②

白矮星等温核外壳层. b-f 的 Kramers 近似 (P24)

理想气体状态方程 ④
消去 ρ 产生 μ
 $K = K_0 \rho T^{-3.5}$ ③

$\Rightarrow \frac{dP}{dT} \sim \frac{T^{7.5}}{L \cdot P} \cdot \frac{M}{\mu m_u}$

积分
 $P_s = 0$ (边界)
 $T_s \approx 0$
 $P_I \sim \sqrt{\frac{M}{L}} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot T^{4.25}$

完全电离 He

再设 $\left\{ n_e = \frac{2}{3} \frac{P_I}{kT_I} \right.$ ④

$n_e = 10 \cdot \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ (简并) ⑤

得到 $T_I \approx (7 \times 10^7 K) \cdot \left(\frac{L/L_0}{M/M_0} \right)^{\frac{2}{7}}$

$-\frac{dE}{dt} = L \approx \left(\frac{T_I}{7 \times 10^7 K} \right)^{\frac{7}{2}} \frac{M}{M_0} L_0$



恒星大气

定义：大气底部为光子逃逸几率为 e^{-1}

$$\text{即 } e^{-1} = \exp\left(-\int_h^\infty \frac{dh}{\lambda}\right)$$

$$1 = \int_h^\infty \frac{dh}{\lambda} = \int_h^\infty \kappa \rho dh$$

假设大气（光球层）等温，那么可以证明

静力学平衡

$$\rho = \rho_{ph} e^{-\frac{h}{H}}, \quad H = \frac{kT}{\mu m_u g} \quad (\text{理想气体})$$

假设不透明 $\kappa = \kappa_0^{(ph)} \rho^a T^b$,

$$\text{即 } 1 = \int_h^\infty \kappa \rho dh$$

若换为 $\kappa_0^{(ph)}$ 可解得

$$= \int_h^\infty \kappa_{ph} \left(\frac{\rho}{\rho_{ph}}\right)^a \rho dh$$

$$= \int_h^\infty \kappa_{ph} \rho_{ph}^{-a} \rho^{a+1} dh$$

$$= \int_h^\infty \kappa_{ph} \rho_{ph}^{-a} \left(\rho_{ph}^{a+1} e^{-(a+1)\frac{h}{H}}\right) dh$$

$$= \frac{H}{a+1} \kappa_{ph} \rho_{ph}$$

$$\xrightarrow{H(T)} P_{ph} = \frac{GM(a+1)}{\kappa_{ph} R^2} \quad \begin{matrix} \text{可观测量 (大气底部的 } \kappa) \\ \text{不可观测量 (一个常数)} \end{matrix}$$

$$\rho_{ph} = \left[\frac{GM(a+1)}{\kappa_0^{(ph)} R^2} \right]^{\frac{1}{a+1}} \left(\frac{k_B}{\mu m_u} \right)^{\frac{1}{a+1}} T_{eff}^{-\frac{b+1}{a+1}}$$

$$\Rightarrow P_{ph} = \frac{\rho_{ph}}{\mu m_u} k T_{eff} = \dots$$

质光关系

$$\frac{dT}{dm} = - \frac{3\kappa}{64\pi^2 a c T^3} \cdot \frac{L}{r^2}$$

$$\frac{dP}{dm} = - \frac{Gm}{4\pi r^2}$$

$$\left. \begin{matrix} \text{理想气体} \end{matrix} \right\} \Rightarrow T \sim \frac{GM \mu \mu}{k_B R}$$

$$\kappa \approx \kappa_0 \rho^\lambda T^{-\nu}$$

$$\xrightarrow{\text{代入: } \frac{dT}{dr} = \frac{T}{R}} L_s = \frac{a c}{\kappa_0} \left(\frac{G m_u \mu}{k} \right)^{4+\nu} R^{3\lambda-\nu} M^{3+\nu-\lambda}$$

1° 较小质量恒星

原子-光子过程主导 $\kappa \sim \rho T^{-3.5}$ (P24 Kramer's list)

$$L_s \approx 1.4 \times 10^{35} \left(\frac{M}{M_0} \right)^{5.5} \frac{1.7}{1+X} \cdot \frac{0.02}{Z} \left(\frac{\mu}{0.62} \right)^{7.5} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-0.5} \text{ erg s}^{-1}$$

2° 较大质量恒星

电子散射主导 $\kappa \sim \rho T^0$

$$L_s \approx 3 \times 10^{35} \left(\frac{M}{M_0} \right)^3 \frac{1.7}{1+X} \left(\frac{\mu}{0.62} \right)^4 \text{ erg s}^{-1}$$

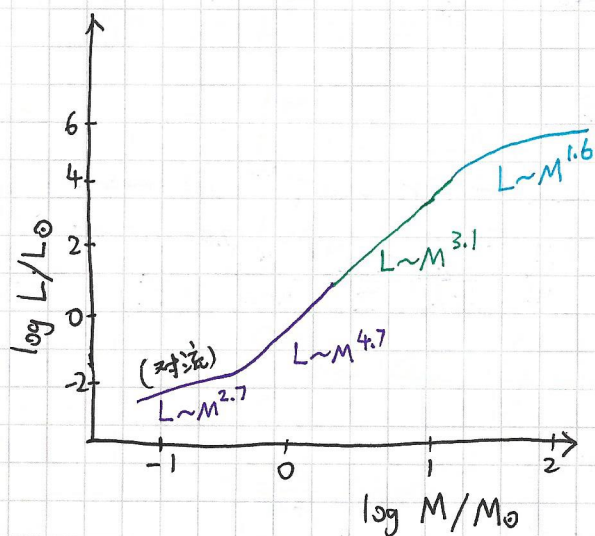
$$\text{分界点: } \frac{M}{M_0} > 1.4 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\frac{1}{5}}$$

3° 极大质量恒星. (辐射压主导)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{dm} &= -\frac{3K}{64\pi^2 ac T^3} \cdot \frac{L}{r^4} \Rightarrow T^4 \sim \frac{LM}{R^4} \\ \frac{dP}{dm} &= -\frac{Gm}{4\pi r^4} \\ aT^4 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 &\approx \frac{GM^2}{R} \end{aligned} \right\} T^4 \sim \frac{M^2}{R^4} \Rightarrow L_s \sim M$$

电子散射 $\kappa \approx \kappa_0 \rho^0 T^0$

观测 L-M 关系



爱丁顿光度. (极大质量恒星的光度上限)

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4 \quad \frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} = \frac{\kappa \rho}{4\pi c} \cdot \frac{L}{r^2}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa \rho}{4ac T^3} \frac{L}{4\pi r^2} \quad \text{辐射压主导}$$

$$\text{静力学平衡的条件: } -\frac{dP_{rad}}{dr} < \frac{Gm\rho}{r^2} = -\frac{dP}{dr}$$

单位体积压力 (引力)

$$\Rightarrow \begin{cases} L < \frac{4\pi c Gm}{\kappa} := L_{Edd} \\ \beta = 1 - \frac{L}{L_{Edd}} \end{cases}$$

爱丁顿标准模型 (多方关系 $n=3$)

假设: 1) 产能率 $\epsilon = \text{const}$, 不透明度 $\kappa = \text{const}$.

$$\left. \begin{aligned} \text{辐射压能} \quad \frac{dT}{dm} &= -\frac{3K}{64\pi^2 ac T^3} \frac{L}{r^4} \\ \text{产能} \quad \frac{dL}{dm} &= \epsilon \Rightarrow L = \epsilon m \\ \text{静力} \quad \frac{dP}{dm} &= -\frac{Gm}{4\pi r^4} \end{aligned} \right\} \frac{dP}{dT} \sim T^3 \Rightarrow P = KT^4$$

$$\Rightarrow \text{推论: } \beta = \frac{P_r}{P} = \frac{\frac{1}{3} a T^4}{K T^4} = \text{const.}$$

$$\text{由于 } KT^4 = \frac{1}{3} a T^4 + \frac{\rho}{m_\mu \mu} kT$$

那么 $\rho \sim T^3 \Rightarrow P \sim \rho^{\frac{4}{3}} (n=3)$

$P \sim T^4$

对流 convection

对流产生条件 (化学均匀时)

约定: d 代表外部小量 (环境)

δ 代表内部小量 (流体元, 绝热元静差)

对流条件: $\delta p > dp$ (越降越重, 越重越降)

元静差满足压力平衡 $\delta p = dp$ ②

绝热过程 $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} \Rightarrow \frac{\delta p}{\delta p} = \frac{p}{\gamma p}$ ③ 代入,

那么有 $\frac{p}{\gamma p} \delta p > dp$

由②, $\frac{p}{\gamma p} dp > dp$, 即 $\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dp}{p} > \frac{dp}{p}$ ④

理想气体: $p = \frac{\rho k T}{m} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$ ⑤ 代入 消去 p

那么有 $\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p} < \frac{dT}{T}$, 即 $\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{rad}} > \frac{\gamma-1}{\gamma}$

可以证明 (易), 绝热元静差有 $\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{ad}} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \Big|_{\gamma=5/3}$

定义 $\nabla_{\text{rad}} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{rad}}$ $\nabla_{\text{ad}} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{ad}}$
辐射温度梯度

则 对流条件为 $\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$ (史密判据)

易知 $\nabla_{\text{rad}} = \frac{3K_{\text{rad}}}{16\pi a c G} \frac{L P}{m T^4}$, K 大或 T 小时易产生对流

Brunt-Väisälä (布维) 频率与对流条件.

气泡受引力 $f_g = -\rho^e g = -\left(\rho_0^e + \frac{d\rho^e}{dr} dr\right) g$
(单位体积) 气泡密度 初始位置

气泡受浮力 $f_b = \rho^R g = \left(\rho_0^R + \frac{d\rho^R}{dr} dr\right) g$
环境密度

又有 $\rho_0^e = \rho_0^R$

那么 气泡受力 $f = \left(\frac{d\rho^R}{dr} - \frac{d\rho^e}{dr}\right) dr \cdot g$

③ $\left(\frac{d\rho}{dr} - \frac{dp}{dr} \cdot \frac{p}{\gamma p}\right) dr \cdot g$

$= \left(\frac{d\rho}{p dr} - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dp}{p dr}\right) p g \cdot dr$

$A = \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dr}$ ④ $- \frac{d \ln T}{dr} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dr}$

由此 $A \rho g dr = f = \rho \cdot \frac{d^2(dr)}{dt^2}$

那么 振荡频率 $N = \sqrt{-Ag}$.
(Brunt-Väisälä freq.)

那么 $\begin{cases} A > 0, \text{ 对流;} \\ A < 0, \text{ 振荡.} \end{cases}$

也显然, $A > 0 \Leftrightarrow \nabla_{\text{rad}} > \frac{\gamma-1}{\gamma}$

β 与 M 的关系: Eddington quartic equation.

P17 Lane-Emden eq. 推导的质量-半径关系

$n=3$ 时 M 仅与 K 有关, 不显含 R . ($P=K\rho^n$)

$$M = 4\pi \left[\frac{4K}{4\pi G} \right]^{\frac{3}{2}} \xi_1^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1} \quad (1)$$

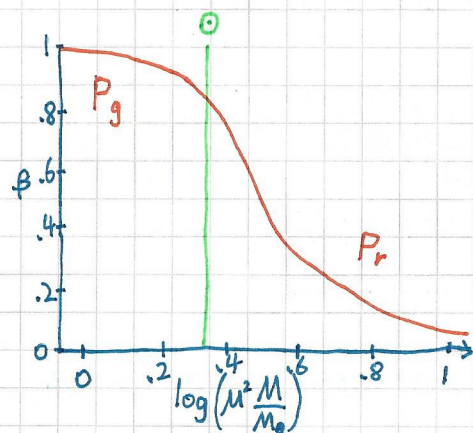
P19 Eddington Standard Model ($n=3$) 有 $P=K\rho^3$, 其中

$$K = \left[\frac{3(N_A k)^4}{a \mu^4} \cdot \frac{1-\beta}{\beta^4} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

①② 消去 K , 得到 β 与 M 的关系: (Eddington 四次方程)

$$0 = -1 + \beta + 0.0004 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{\mu}{0.61} \right)^4 \beta^4$$

即 $1 - \beta = \left(\frac{M}{M_*} \right)^2 \mu^4 \beta^4$, $M_* = 18.3 M_\odot$



Eddington 模型的质光关系.

$$L \sim \frac{P_{31} L_{\text{Edd}}}{(1-\beta)} L_{\text{Edd}}$$

$$\text{Edd quartic} \dots M^2 \mu^4 \beta^4 \cdot \frac{4\pi c G}{K} M$$

下面对 Edd quartic 做些近似

1° M 大时, β 小,

$$\left(\frac{M}{M_*} \right)^2 \mu^4 \beta^4 = 1 - \beta \approx 1, \\ M^2 \sim \beta^{-4}, \quad L \sim M.$$

2° M 小时, β 大 ≈ 1 ,

$$L \sim M^{\frac{3}{4}} \cdot M, \quad L \sim \frac{M^3}{K}.$$

Cowling Model (已废弃)

核反应限制在中心点 (点源模型)

$$\frac{dF}{dm} = 0 \Rightarrow F = L = \text{const.}$$

$$\text{Karmars: } K = K_0 \rho^a T^b$$

$$\begin{aligned} \text{即} \frac{dP_{\text{rad}}}{dr} &= \frac{dT}{dr} \cdot \frac{dP_{\text{rad}}}{dT} = \left(-\frac{3K\rho}{4acT^3} \cdot \frac{L}{4\pi r^2} \right) \frac{dT}{dr} \\ &= -\frac{K\rho}{c} \frac{L}{4\pi r^2} \frac{Karmars}{Karmars} - \frac{K_0 L}{c} \frac{\rho^{a+1} T^b}{4\pi r^2} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} \quad (2)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (3)$$

$$P = P_{\text{rad}} + \frac{R}{\mu} \rho T \quad (4)$$

①④ 联立可得 $P(r), m(r), T(r), \rho(r)$.

(不要忘记 $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} u_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4$)

引入化学势 $\nabla_{\mu} = \frac{d \ln \mu}{d \ln P}$, 重新推导对流的判据. (仿照 P32)

$$\text{理想气体 } P = \frac{\rho}{\mu m_u} kT \quad \text{即 } d \ln p = d \ln P - d \ln T + d \ln \mu$$

$$\text{考虑某种非理想气体} \quad d \ln p = \alpha d \ln P - \delta d \ln T + \varphi d \ln \mu$$

可列方程:

$$\text{对流元(e)} \quad \frac{d \ln p_e}{dr} = \alpha \frac{d \ln P_e}{dr} - \delta \frac{d \ln T_e}{dr} \quad (\mu \text{ 不变})$$

↑
准静态
压力平衡

$$\text{环境(R)} \quad \frac{d \ln p_R}{dr} = \alpha \frac{d \ln P_R}{dr} - \delta \frac{d \ln T_R}{dr} + \varphi \frac{d \ln \mu_R}{dr}$$

对流不稳定条件: $d p_e > d p_R$

$$\text{即 } \frac{d \ln p_e}{dr} < \frac{d \ln p_R}{dr} \quad (\text{越升越轻越升})$$

这是负的!

$$\text{即 } \frac{d \ln T_R}{dr} < \frac{d \ln T_e}{dr} + \frac{\varphi}{\delta} \frac{d \ln \mu_R}{dr}$$

乘以 $\frac{dr}{d \ln P}$ (负数) 得到

$$\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}} + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_{\mu} \quad (\text{勒都判据})$$

$$(\nabla_{\mu} = \frac{d \ln \mu_e}{d \ln P} > 0 \quad (\text{恒星}))$$

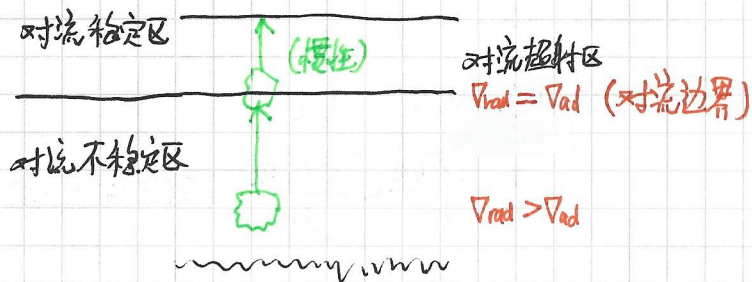
对比 $\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}} \quad (\text{史瓦西判据})$

恒星更不易满足勒都判据.

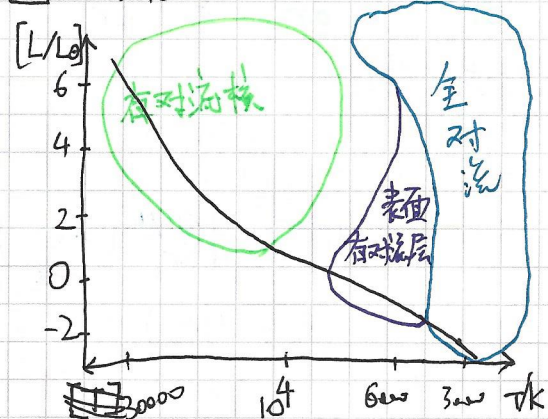
半对流: (史密西判据) $\checkmark$ $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$
 (勒都判据) $\times$ $\nabla_{rad} < \nabla_{ad} + \frac{\rho}{\delta} \nabla_{\mu}$

则不发生大范围的对流, 但存在局部的振荡, 使得 μ 在“半对流区”逐渐均匀,

(overshooting)
 对流超射 (促进物质混合与能量扩散)



对流区



混合程 (Mixing length) 理论

对流元的不稳定运动需三维数值模拟, 理论不完善.

混合程理论: 将物质对流类比为气体分子的热量转移, 将传递能量的基元由分子改为宏观的流元.

l_m 混合程: 对流元经过 l_m 后瓦解, 与周围物质混合.

DT 与环境温度差 $T_e - T_r = \left(\frac{dT}{dr} \Big|_e - \frac{dT}{dr} \Big|_r \right) \Delta r$
 设 $DP = 0$
 D_p $p_e - p_r$
 设 $D_\mu = 0$ (化学均匀)

$$DT = \left(\frac{dT}{dr} \Big|_e - \frac{dT}{dr} \Big|_r \right) \Delta r$$

所以 $DT \cdot dr = d(T_e - T_r) \cdot \Delta r$

$$\overline{DT} \cdot dr = d(T_e - T_r) \cdot \frac{l_m}{2}$$

$$\nabla - \nabla_e = \frac{d \ln T_r}{d \ln P} - \frac{d \ln T_e}{d \ln P}$$

$$\nabla - \nabla_e = \frac{1}{T} \frac{d(T_r - T_e)}{d \ln P}$$

$$\frac{1}{H_p} = - \frac{d \ln P}{dr} \rightarrow \frac{\overline{DT}}{T} = (\nabla - \nabla_e) \frac{l_m}{2} \cdot \frac{1}{H_p} \quad ①$$

设环境与绝热膨胀均满足:
 $d \ln p = \alpha \cdot d \ln P - \delta \cdot d \ln T + \varphi \cdot d \ln \mu$

那么 $\frac{\overline{Dp}}{p} = -\delta \cdot \frac{\overline{DT}}{T}$

$$\rho \bar{a} = \bar{f} = -g \cdot \overline{Dp}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_m = \frac{1}{2} \sqrt{2 \bar{a} \frac{l_m}{2}}$$

$$\frac{\overline{Dp}}{p} = -\delta \cdot (\nabla - \nabla_e) \frac{l_m}{2} \cdot \frac{1}{H_p}$$

$$\bar{v} = \frac{l_m}{2\sqrt{2}} \left(g \delta \frac{\nabla - \nabla_e}{H_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad ①$$

$$F_{conv} = \rho \bar{v} C_p \bar{DT}$$

单位质量流体元
在等压过程中释放能量。

$$\bar{v} = \frac{l_m}{2\sqrt{2}} \left(g\delta \frac{\nabla - \nabla_e}{H_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{\bar{DT}}{T} = (\nabla - \nabla_e) \frac{l_m}{2} \cdot \frac{1}{H_p} \quad \textcircled{1}$$

$$F_{conv} = \rho C_p T \sqrt{g\delta} \frac{l_m^2}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\nabla - \nabla_e}{H_p} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \textcircled{2}$$

可简写为 $F_{conv} = \sigma_{conv} (\nabla - \nabla_e)^{\frac{3}{2}}$

P21. $F_{rad} = -K_{rad} \frac{dT}{dr}$

P23. $K_{rad} = \frac{4ac \cdot T^3}{3K_{(rad)}\rho}$

$\nabla := \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP}$

P7. $\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho$

$$F_{rad} = \frac{4acG}{3} \frac{T_m^4}{K P r^2} \nabla \quad \textcircled{3}$$

$$\frac{L}{4\pi r^2} = F = F_{rad} + F_{conv}$$

$\nabla_{rad} := \frac{d \ln T_{rad}}{d \ln P} = \frac{P}{T_{rad}} \cdot \frac{dT_{rad}}{dP}$
充当已知量

P23. 辐射传能公式 (整个对流区与外部传能只计辐射)

$$\frac{dT_{rad}}{dr} = -\frac{3K\rho L}{16\pi ac T^3 r^2}$$

$$F_{rad} + F_{conv} = \frac{4acG}{3} \frac{T_m^4}{K P r^2} \nabla_{rad} \quad \textcircled{4}$$

$$\frac{dT}{dr}|_e = \frac{dT_e}{dr}|_{ad} + \frac{dT_e}{dr}|_L$$

对流元温度改变: 由于绝热膨胀 & 辐射

(单位质量) 流体元通过辐射放出能量的功率

$$L_e = -\rho V \cdot \frac{dT_e}{dt}$$

$$\approx -\rho V \cdot \frac{dT_e}{dr}|_L \cdot \bar{v}$$

$$\frac{1}{H_p} = -\frac{d \ln P}{dr}$$

$$\nabla_e - \nabla_{ad} = \frac{L_e H_p}{\rho V C_p \bar{v} T} \quad \textcircled{2}$$

注: $\nabla_{ad} = \frac{8 \cdot P}{C_p T \rho}$

$$\nabla - \nabla_e = \frac{\bar{DT} \cdot 2H_p}{l_m T} \quad \textcircled{1}$$

将 P23 辐射传能公式应用到流体元。

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3K\rho}{16\pi ac T^3} \frac{L_e}{r^2} \quad (\text{r 为流体元径向坐标})$$

流体元与周围的温度梯度。

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{DT}{d/2} \quad (d \text{ 为流体元直径})$$

设流体元为球状, 表面积为

$$S = \pi d^2$$

那么,

$$L_e = \frac{8ac T^3}{3K\rho} \cdot DT \frac{S}{d}$$

$$\frac{\nabla_e - \nabla_{ad}}{\nabla - \nabla_e} = \frac{2ac T^3}{3K\rho^2 C_p \bar{v} l_m} \cdot \frac{l_m^2 S}{d \cdot V}$$

形状因子 form factor,
可取 $d \sim \frac{1}{\sqrt{6}} l_m$

混合程理论的基本方程组

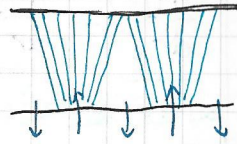
① ~ ⑤ 可解出

$$\frac{\nabla_e - \nabla_{ad}}{\nabla - \nabla_e} = \frac{6ac T^3}{K\rho^2 C_p l_m \bar{v}} \quad \textcircled{5}$$

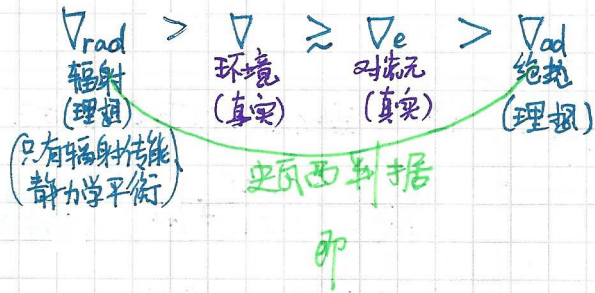
F_{rad} F_{conv} $\bar{v}$ ∇ ∇_e
五个未知量,

上述方程组中, l_m 为完全假定的可调整量;

$l_m \sim 1.8 H_p$, 因为



四个温度梯度的关系.



$$\frac{3K}{16\pi acG} \cdot \frac{L P}{m T^4} > \frac{8 \cdot P}{c_p T_p}$$

产生对流的区域:

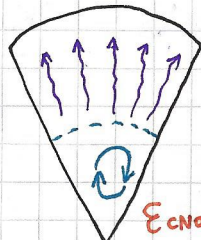
- $\frac{L}{m}$ 大, 产能率高, 中大质量恒星中心
- K 大, 小质量星外层低温区域
- ∇_{ad} 小, 部分电离, 小质量星外层



$0.1 \sim 0.8 M_\odot$



$0.8 \sim 1.5 - 2 M_\odot$



$M > 1.5 - 2 M_\odot$

P28 恒星大气 (Kornars) Note: $k = k_0 \rho^a T^b$.

$$\rho_{ph} = \left[\frac{GM(a+1)}{R^2 k_0^{(a+1)}} \right]^{\frac{1}{a+1}} \left(\frac{k_0}{\mu m_H} \right)^{-\frac{1}{a+1}} T_{eff}^{-\frac{b+1}{a+1}}$$

P17 多方模型的 M-R 关系

$$K = N_n G M^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{2n}{n}}$$

电离的理想气体: $n = \frac{3}{2}$
分子氢: $n = \frac{5}{2}$

斯特藩 $L_s = 4\pi R^2 T_{eff}^4$

定义:

$$P = K \rho^\gamma = K \rho^{1+\frac{1}{n}}$$

$R = R(M, T_{eff})$

$$L_s \sim R^{\frac{4\xi(1-2\eta)+2}{M}} M^{\frac{4\xi(\eta+\frac{1}{2})}{M}}$$

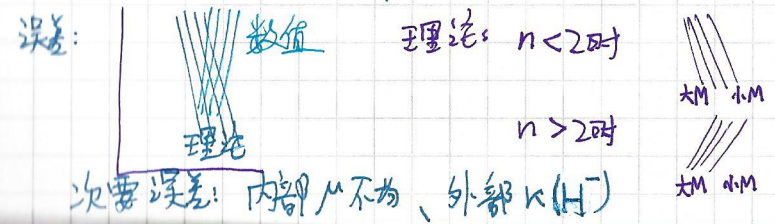
或 $L_s \sim T_{eff}^{4+2\frac{\xi}{\eta}} M^{-2\xi(\eta+\frac{1}{2})}$

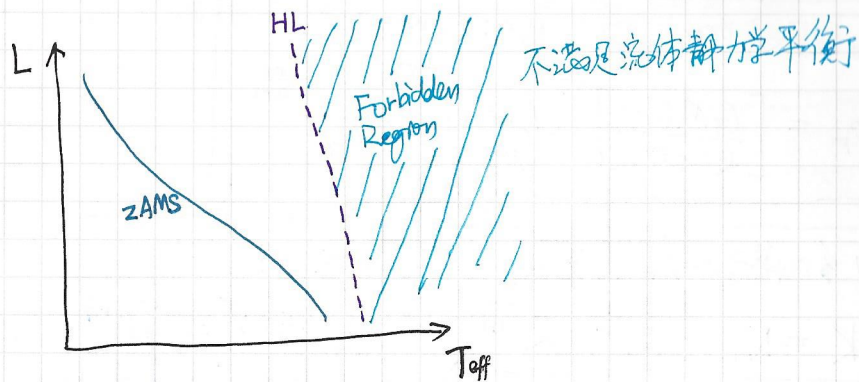
Note: $\eta = \frac{\gamma-1}{a+1}$
 $\xi = \frac{1}{1+\eta(b+1)}$
 $\zeta = \frac{1}{1-2\eta}$

若不假定 n 的值, 有 $L_s \sim T_{eff}^A M^B$, $A = A(n, a, b)$, $B = B(n, a, b)$
代入 $n = \frac{3}{2}$, 有 $T_{eff} \approx 2400K \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{0.2} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{0.6} \sim 2400K$

那么全对流恒星 (在 Hayashi Line 上) 的温度几乎与 M, R 无关, 约为 $3000 \sim 5000K$.

→ Hayashi Line (林达四郎线) 几乎为竖线
模型主要误差: $n \neq const$, 即 $n \neq \frac{3}{2}$, 有部分电离的区域.



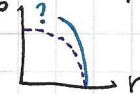
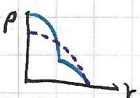
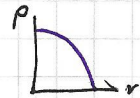


由 P28 $\begin{cases} \text{大气(光球层)} \\ P = K \rho^{1+\frac{1}{n}} \text{多方假设} \\ k = k_0 (\rho/\rho_0)^a T^b \end{cases}$, $K = \left[\frac{GM(a+1)}{R^2 k_0 (\rho_0)^b} \right]^{-\eta} \left(\frac{k_0}{\mu m_H} \right)^{1+\eta} T_{\text{eff}}^{1+\eta(b+1)}$

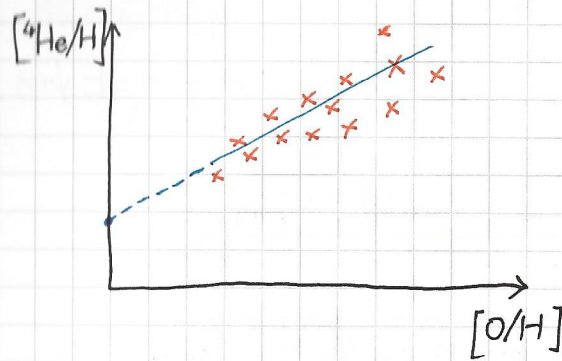
1° Hayashi line 线上, $K = K_{\text{pol}}$

2° 左侧, $K > K_{\text{pol}}$

3° 右侧, $K < K_{\text{pol}}$



原初 He 丰度的观测方法.



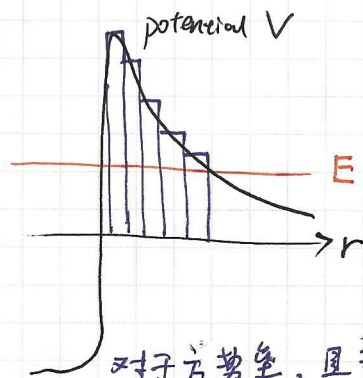
① 观测许多星系的 $[^4\text{He}/\text{H}]$ 与 $[\text{O}/\text{H}]$ 并画点

② 拟合关系式并外推至 $[\text{O}/\text{H}] = 0$ 时,

取出截距, 得到原初 $[^4\text{He}/\text{H}]$ (误差不小)

Note, 贫 O (或贫金属) 星系非常重要!

聚变中的隧穿几率



$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_r} + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

其中 $m_r = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$

对于方势垒，且被垒主要在外侧，那么，
 (设 $\chi = \frac{\sqrt{2m_r(V-E)}}{\hbar}$) 势垒中有：

$$\psi(r) = A \cdot \frac{e^{\chi r}}{r} + B \frac{e^{-\chi r}}{r} \approx A \cdot \frac{e^{\chi r}}{r}$$

$$\text{隧穿几率} \approx \frac{|\psi(r_N)|^2 4\pi r_N^2}{|\psi(r_0)|^2 4\pi r_0^2} = \left| e^{-\chi(r_0 - r_N)} \right|^2$$

将方势垒拼在一起，

$$\text{隧穿几率} \approx \left| e^{-\int_{r_N}^{r_0} \chi(r) dr} \right|^2$$

$$\approx \exp \left[-\sqrt{\frac{E_G}{E}} \right] \sim e^{-\frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{\epsilon_0 h v}}$$

其中 $E_G = (\pi \alpha Z_1 Z_2)^2 2m_r c^2$
 伽莫夫能 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$

核反应概率

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \sigma(E) v f(v) dv$$

反应截面 × 速率 对速率分布积分平均

其中 $\sigma(E) \propto \pi \lambda^2 P(E) \xi(E) q(E)$

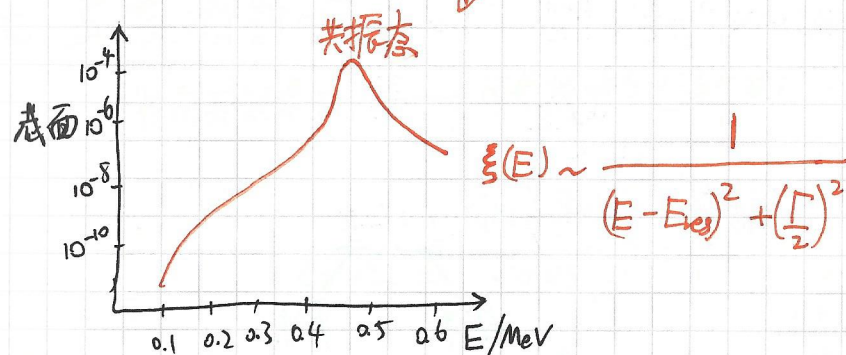
德布罗意波长
 $\lambda \propto \frac{1}{E}$

隧穿几率

$$\sim \exp \left[-\frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{\epsilon_0 h v} \right]$$

共振能级分布

隧穿时核反应的
 概率



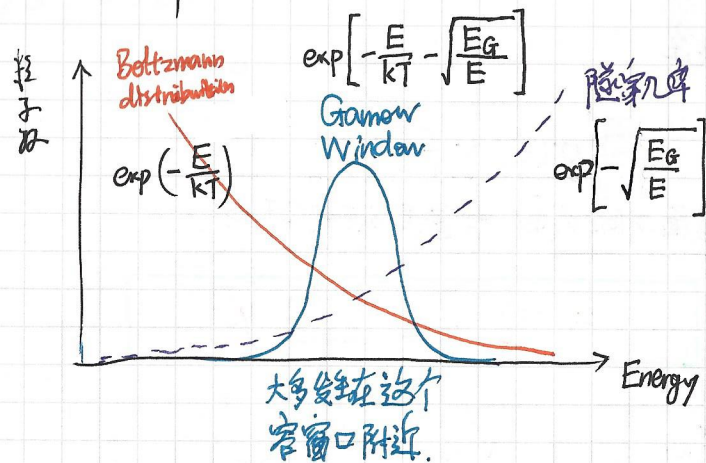
共振点源于离散能级之间的跃迁(角动量守恒)

$\Delta E \cdot \tau \sim \hbar$
 共振点 复合核的寿命
 展宽

引入 S-factor: $\sigma(E) = S(E) \frac{\exp(-\frac{b}{\sqrt{E}})}{E}$
 其中 $b = 31.291 Z_1 Z_2 \sqrt{m_r} \cdot \text{keV}^{1/2}$

注: S(E) 变化不大, 适合外推.

Gamow 峰



Gamow 窗口位置: $E_0 = (\frac{b kT}{2})^{\frac{2}{3}}$, $b = \sqrt{E_G}$

近似二次函数 "半宽": $\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{E_0 kT}$

峰值: $e^{-\frac{3E_0}{kT}}$

产能率 $\epsilon = \frac{1}{\rho} \sum r_{ij} Q_{ij}$

反应率
单位体积
单位时间
反应次数

产能

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \langle \sigma v \rangle n_i^2, & i=j \text{ 相同粒子} \\ \langle \sigma v \rangle n_i n_j, & i \neq j \text{ 不同粒子} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{1 + \delta_{ij}} n_i n_j$$

粒子的数密度变化率 (演化!)

每次反应增/减的粒子数

$$\frac{dn_i}{dt} = - \sum_j \frac{a_i}{1 + \delta_{ij}} r_{ij}(n) + \sum_{kl} \frac{b_i}{1 + \delta_{kl}} r_{kl}(i)$$

$$\frac{dY_i}{dt} = \rho N_A \left[- \sum_{ij} \frac{a_i}{1 + \delta_{ij}} Y_i Y_j \langle \sigma v \rangle_{ij} + \sum_{kl} \frac{b_i}{1 + \delta_{kl}} Y_k Y_l \langle \sigma v \rangle_{kl} \right]$$

数丰度, $n_i = \rho N_A Y_i$

电子屏蔽的影响。

核周围聚集电子 $\rightarrow$ 库伦势减小 (汤川势)

反应率增加

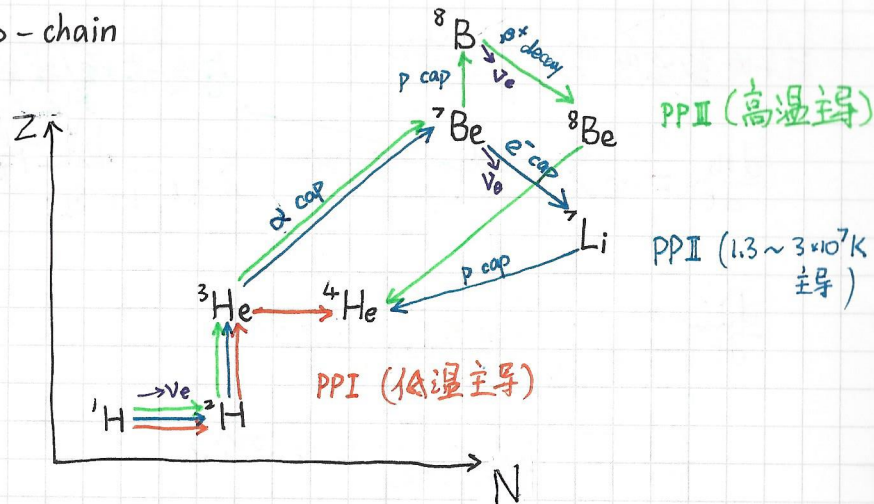
$$\langle \sigma v \rangle_s = f \langle \sigma v \rangle, \quad f > 1$$

具体而言: 相对裸核, 有屏蔽的核子的等效热运动能量增加:

$$\tilde{E} = E + E_D = E + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_0}$$

德拜长度 r_0

pp-chain



PPII (高温主导)

PPI (1.3 ~ 3 x 10^7 K 主导)

$$Q_{pp\text{chain}} = 4m_p - m_\alpha = 26.7 \text{ MeV},$$

but $E_{\nu_e}(\text{PPI}) = 0.263 \text{ MeV}$ 产能率最高

$$E_{\nu_e}(\text{PPII}) = 0.8 \text{ MeV}$$

$$E_{\nu_e}(\text{PPIII}) = 7.2 \text{ MeV} \text{ 产能率最低}$$

某典型情况下 ($E = 10 \text{ keV}$), $p + p \rightarrow D + e^+ + \nu_e$

的 S -factor 远小于其它反应, 起瓶颈作用(反应最慢, 限制反应速度, 其它反应随时) 原因: 类似“质子衰变”

Note. 地球上的D不可能来自恒星的ppchain, 而是原初核合成. ($D/H \sim 10^{-4}$)

pp chain 产能率近似表达式

$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{m\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right) dE$$

$$= \sqrt{\frac{8}{m\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} S(E_0) \int_0^\infty \exp\left[-3\left(\frac{E_0}{4kT}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \exp\left[-\frac{(E-E_0)^2}{\Delta^2}\right] dE$$

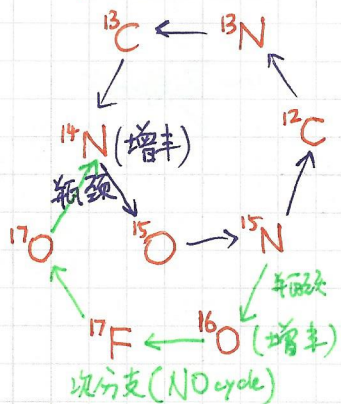
$$= \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \frac{S(E_0)}{\sqrt{mb}} \eta^2 e^{-\eta}, \text{ where } \eta = \frac{3E_0}{kT}$$

$$\sim T^n$$

对于 pp chain ($T \sim 1.5 \times 10^7 \text{ K}$), $n \approx 3.9 \sim 4$.
(屏蔽效应 ~ 4.6)

CNO cycle

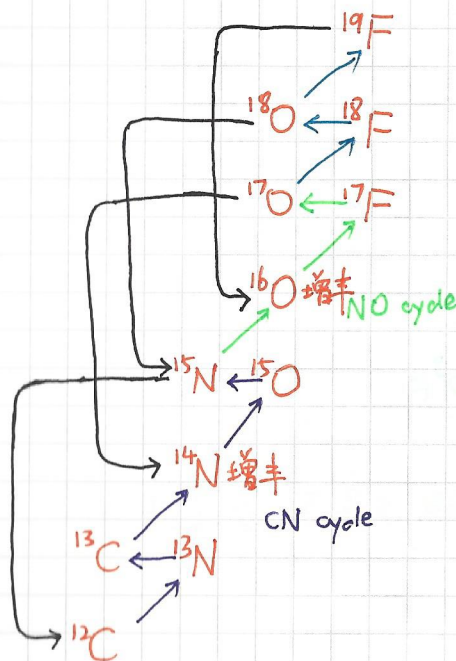
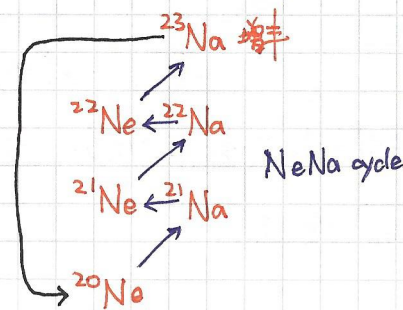
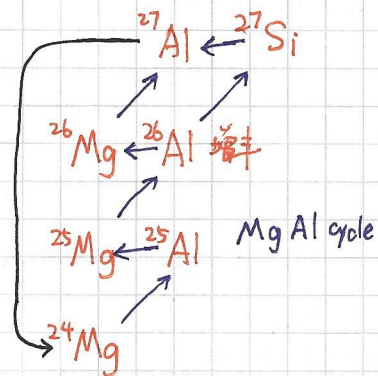
CNO cycle 主分支 (CN cycle)



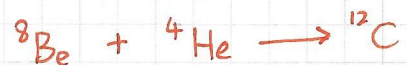
Tip. 丰度之比 = 反应时标之比,
瓶颈反应 (循环中) 有增丰,
但平衡后不再增丰.

$$\begin{aligned} E_{pp} &\sim T^{4.6} \\ E_{CNO} &\sim T^{16.7} \end{aligned} \Rightarrow T_{\frac{1}{10}} \approx \left(\frac{X_H}{50 X_{CN}} \right)^{\frac{1}{12.1}} 1.7 \times 10^7 K$$

$\sim 1.2 \sim 1.5 M_{\odot}$



3 α reaction



(有共振态, 加快反应!!!)

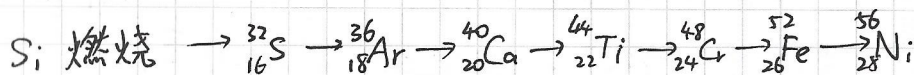
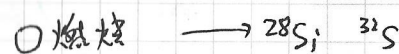
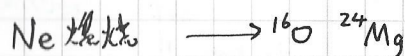
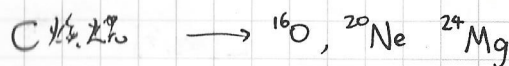
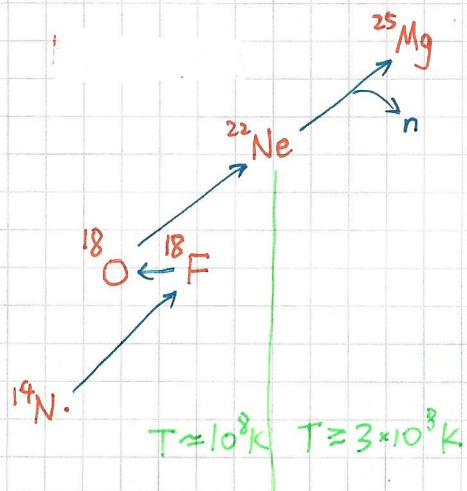
$$E_{3\alpha} \sim T^{40}$$

其 α capture rate.



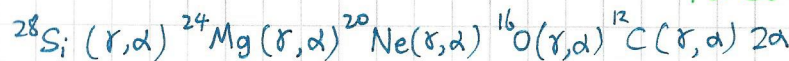
Tip: 这些元素在宇宙中很丰富. (α elements)

次级 He 燃烧



Tip 燃烧前发生光蜕变:

Tip 铁峰元素
Fe Co Ni



边界模糊的“洋葱结构”

重元素的形成

— s-process 大质量恒星 or AGB or He flash.

— r-process supernova? or kilonova?

中子源: ${}^{22}\text{Ne}(\alpha, n)$, ${}^{13}\text{C}(\alpha, n)$

— p-process. 有待思考, 难进行

来源: 光蜕变产生质子,

产生富质子同位素

注: 极高密环境下, 仍考虑中微子传能方程.

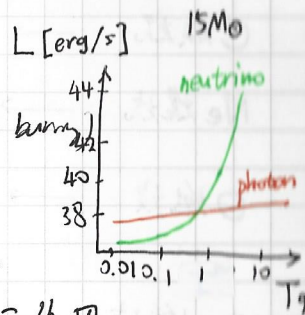
中微子.

恒星内部的中微子讨论

主序: 携带少部分能量 (H, He burn)

晚期: 携带大部分能量

非核反应产生中微子. (高T高P) 弱相互作用.



开始回顾基本方程.

① 质量分布 P_1 $\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$

② 静力平衡 P_2 $\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$

③ 能量平衡 P_{20} $\frac{dL}{dm} = \epsilon - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\rho} \right) - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right]$

④ 能量转移 { 辐射 P_{23} $\frac{dT}{dm} = -\frac{3K}{4a\tilde{\epsilon}T^3} \frac{L}{16\pi^2 r^4}$
对流 P_{32} (相等) $\frac{dT}{dm} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{P} \frac{dP}{dm}$

同模变换

若得到一个恒星的解, 可通过与适当因子相乘, 得到不同质量恒星的解.

定义 $m = x \cdot M$ $dm = M dx$

$r = f_r(x) \cdot r^*$ $dr = r^* dx$

$P = f_P(x) \cdot P^*$ $dP = P^* dx$

$L = f_L(x) \cdot L^*$ $dL = L^* dx$

$T = f_T(x) \cdot T^*$ $dT = T^* dx$

$\rho = f_\rho(x) \cdot \rho^*$ $d\rho = \rho^* dx$

标度常数, 取决于恒星的真实参数.
结构函数, 与真实量无关 (是无量纲的)

下面将基本方程无量纲化:

① 质量分布 $\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$

$\frac{r^*}{M} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{1}{4\pi f_r^2 r^{*2} f_\rho \rho^*}$

$\frac{dr}{dx} = \frac{1}{4\pi f_r^2 f_\rho} \cdot \frac{M}{r^{*3} \rho^*}$

那么 $\frac{dr}{dx} = \frac{1}{4\pi f_r^2 f_\rho}$, $\rho^* = \frac{M}{r^{*3}}$

② 静力平衡 $\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$

$$\frac{p^* df_p}{M dx} = -\frac{G}{4\pi} \frac{\pi M}{f_r^4 r^{*4}}$$

$$\frac{df_p}{dx} = -\frac{\pi}{4\pi f_r^4} \cdot \underbrace{\frac{GM^2}{r^{*4} p^*}}_{=1}$$

则 $\frac{df_p}{dx} = -\frac{\pi}{4\pi f_r^4}$, $p^* = \frac{GM^2}{r^{*4}}$

③ 能量平衡 $\frac{dL}{dm} = \epsilon$ 设 $\epsilon = \epsilon_0 \rho^\lambda T^\nu$

$$\frac{L^* df_L}{M dx} = \epsilon_0 f_p^\lambda \rho^{*\lambda} f_T^\nu T^{*\nu}$$

$$\frac{df_L}{dx} = f_p^\lambda f_T^\nu \cdot \underbrace{\frac{\epsilon_0 M \rho^{*\lambda} T^{*\nu}}{L^*}}_{=1}$$

则 $\frac{df_L}{dx} = f_p^\lambda f_T^\nu$, $L^* = \epsilon_0 M \rho^{*\lambda} T^{*\nu}$

④ 辐射传能 $\frac{dT}{dm} = -\frac{3K}{4acT^3} \frac{L}{16\pi^2 r^4}$

设 $K = K_0 \rho^n T^{-s}$

$$\frac{T^* df_T}{M dx} = -\frac{3K_0 f_p^n f_T^{-s} \rho^{*n} T^{*-s}}{4ac f_T^3 T^{*3}} \cdot \frac{f_L \cdot L^*}{16\pi^2 f_r^4 r^{*4}}$$

$$\frac{df_T}{dx} = -\frac{3}{64\pi^2} \cdot \frac{f_p^n f_L}{f_T^{s+3} f_r^4} \cdot \underbrace{\frac{K_0 \rho^{*n} \cdot L^* \cdot M}{ac \cdot T^{*s+4} r^{*4}}}_{=1}$$

则 $\frac{df_T}{dx} = -\frac{3}{64\pi^2} \frac{f_p^n f_L}{f_T^{s+3} f_r^4}$, $L^* = \frac{ac}{K_0} \cdot \frac{T^{*s+4} r^{*4}}{\rho^{*n} M}$

(当然亦可写为 $T^* = \dots$)

⑤ 补充:(理想气体为例)状态方程 $P = \frac{\rho}{\mu m_u} kT$

$$f_p P^* = \frac{f_p \rho^*}{\mu m_u} \cdot k f_T T^*$$

$$f_p = f_p f_T \cdot \underbrace{\frac{k}{\mu m_u} \frac{\rho^* T^*}{P^*}}_{=1}$$

则 $f_p = f_p f_T$, $T^* = \frac{\mu m_u}{k} \cdot \frac{P^*}{\rho^*}$

例. Kramer近似下的 L-M 关系.

$$K = K_0 \rho^n T^{-s}, \quad n=1, s=3.5$$

$$\begin{cases} \rho^* = \frac{M}{r^{*3}} & \textcircled{1} \\ P^* = \frac{GM^2}{r^{*4}} & \textcircled{2} \\ L^* = \frac{ac}{K_0} \cdot \frac{T^{*s+4} r^{*4}}{\rho^{*n} M} & \textcircled{4} \\ T^* = \frac{\mu m_H}{k} \frac{P^*}{\rho^*} & \textcircled{5} \\ L^* = \epsilon_0 M \rho^{*\lambda} T^{*v} & \textcircled{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \sim \frac{R^{3n-s}}{M^{n-s-3}} \\ L \sim \frac{M^{\lambda+v+1}}{R^{3\lambda+v}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{质光关系} & L \sim M^{\frac{(\lambda+v+1)(3n-s) - (n-s-3)(3\lambda+v)}{3\lambda+v+3n-s}} \\ \text{质量-半径关系} & R \sim M^{\frac{n-s+\lambda+v-2}{3n-s+3\lambda+v}} \end{cases}$$

取 $\begin{cases} n=1, s=3.5 & (\text{Kramer's opacity}) \\ \lambda=1, v=4 & (\text{p-p chains}) \end{cases}$

得到 $L \sim M^{5.46}$ 3 if $K=\text{const}$ 观测值

$R \sim M^{0.08}$ 0.43 if $K=\text{const}$ $R \sim M^{0.8}, M < 1M_\odot$

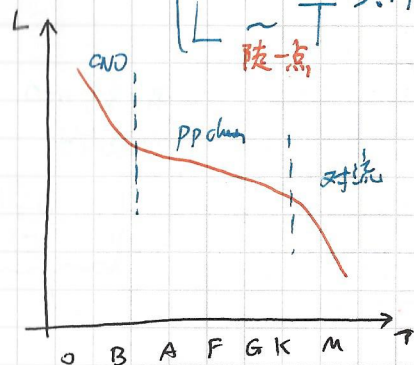
取 $\begin{cases} n=1, s=3.5 & (\text{Kramer's opacity}) \\ \lambda=1, v=17 & (\text{CNO cycle}) \end{cases}$

得到 $L \sim M^{5.15}$ 3 if $K=\text{const}$

$R \sim M^{0.69}$ 0.8 if $K=\text{const}$ $R \sim M^{0.57}, M > 1M_\odot$

$$L \sim R^2 T^4 \Rightarrow \begin{cases} L \sim T^{4.12} & (\text{pp chain}) \quad 5.60 \text{ if } K=\text{const} \\ L \sim T^{5.47} & (\text{CNO cycle}) \quad 8.57 \text{ if } K=\text{const} \end{cases}$$

拐点
陡一点



Tip. 集中的产能. (外层产能可忽略)

— $1M_\odot: \epsilon(\frac{m}{M}=0.6) \leq 10^{-2} \epsilon_{\text{center}}$

— $10M_\odot: \epsilon(\frac{m}{M}=0.3) \leq 10^{-3} \epsilon_{\text{center}}$ (更集中)

$$\begin{cases} M \sim T^{0.75} & (\text{pp}) \quad 1.87 \text{ if } K=\text{const} \\ M \sim T^{1.06} & (\text{CNO}) \quad 2.86 \text{ if } K=\text{const} \end{cases}$$

可用于估算恒星质量下限 ($T_c \geq 4 \cdot 10^6 \text{ K}$)

位力定理 P8 的应用. 金斯质量, 金斯半径.

位力定理: $2K = U$ 稳定性边界
 $2K > U$ 膨胀
 $2K < U$ 坍缩.

引力势 $n=0$
 (球对称)

$$R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad N = \frac{M}{\mu m_H}, \quad K = \frac{3}{2} N k T, \quad U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

$$\Rightarrow M_{\text{Jeans}} = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \sim T^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}$$

$$R_{\text{Jeans}} = \left(\frac{15k}{4\pi\mu m_H G} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \sim T^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}$$

✓ 同样是算 Jeans 质量

P63 Jeans 不稳定性的结果 (流体力学) 是 P62 位力定理的结果的 $\left(\frac{\pi}{3} \right)^3 \approx 1.15$ 倍. (无外压)

Jeans 不稳定性 (Jeans Swindle, 即有矛盾之处)

$$\nabla\phi = 0 \\ \nabla^2\phi > 0.$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{连续性}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla\phi}{\rho} \quad \text{欧拉 (4=)}$$

$$\nabla^2\phi_G = 4\pi G\rho \quad \text{引力势}$$

$$\text{设 } \begin{cases} \rho = \rho_0 + \rho_1 \\ p = p_0 + p_1 \\ \vec{v} = 0 + \vec{v}_1 \\ \phi = \phi_0 + \phi_1 \end{cases}$$

const 量

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \rho_1 = -4\pi G \rho_0 \rho_1, \quad c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \approx \sqrt{\frac{kT}{\mu m_H}}$$

波动解为 $\rho_1 \sim \exp(i\vec{k}\vec{x} - i\omega t)$, $k = \frac{2\pi}{2R_J}$.
 (指数)

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 < 0 \quad \text{即不稳定 (指数增长)}$$

金斯不稳定的判据 (ω 为虚数): $k < k_J = \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0}}{c_s}$

$$M_{\text{Jeans}} = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{6G^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{c_s^3}{\rho_0^{\frac{1}{2}}} \sim \sqrt{\frac{T^3}{\rho}}$$

eg.

分子云 ($T \sim 100\text{K}$, $\rho \sim 10^{-22} \text{g cm}^{-3}$) $M_J \sim 5 \times 10^4 M_\odot$ 星团质量
 星团 ($T \sim$ $\rho \sim$) $M_J \sim$ 恒星质量

eg.

角动量太大 $\Rightarrow$ 双星.

触发恒星形成.

- 分子云 (核)
- 密度扰动增加 (SNa, 云气碰撞, 旋臂)

云气坍塌方程*

在恒星基本方程中删去静力学平衡, 加入欧拉方程

坍塌过程:

① 等温

② 绝热 $\gamma = \frac{5}{3} \sim \frac{7}{5}$

③ 等温 (失控 runaway collapse)

④ 绝热

⑤ 达到流体静力学平衡 Hayashi line.

引力半径 $\sim \frac{M^2}{R^5}$

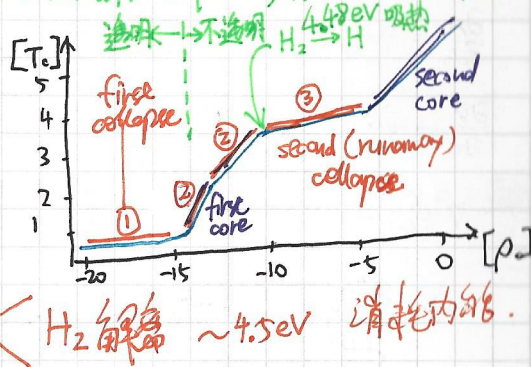
透明: $\left| \frac{dP}{dr} \right| \sim \frac{M}{R^4}$

引力半径增加快

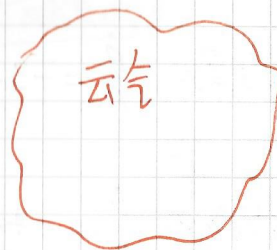
不透明: $\left| \frac{dP}{dr} \right| \sim \frac{M^{\frac{5}{3}}}{R^6}$

压强半径增加快

Note. 磁压阻碍坍塌



恒星质量下限. 与褐矮星.



坍塌

1° 温度够高 $\rightarrow$ 恒星

2° 已达简并但温度不够核反应 $\rightarrow$ 不是恒星

Tip. 简并压主导时,

坍塌过程中由释放的引力势能发光 (越来越 $T \downarrow \rho \uparrow$)

这是褐矮星 ($R \sim M^{-\frac{1}{8}}$) 这是部分简并气体作用的

近似结果. 类似白矮星.

云气坍缩 Step 1. 沿林东一郎线演化.

密度变化 $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 \frac{\dot{r}}{r}$

引力 $\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$

压强变化 $\frac{\dot{P}}{P} = -4 \frac{\dot{r}}{r}$

物态 $\delta \frac{\partial \ln T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \ln P}{\partial t} - \frac{\partial \ln P}{\partial t}$

温度变化 $\frac{\dot{T}}{T} = \frac{4\alpha-3}{8} \frac{\dot{r}}{r}$

理想气体 $\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{\dot{r}}{r}$
non-R 解 $T = \text{const.}$

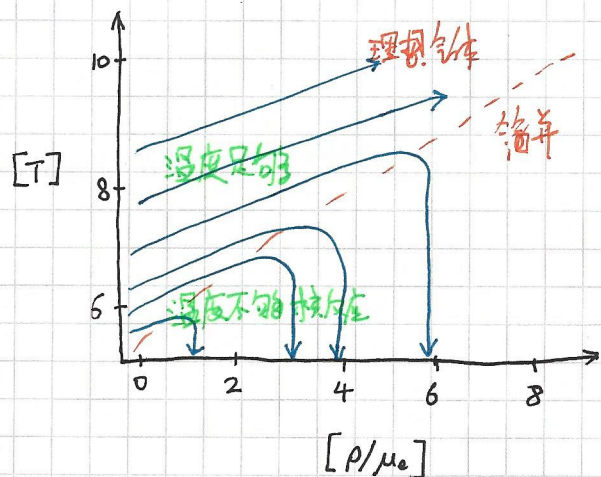
引力势 $L = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_{gr}}{\partial t}$

多方模型 $n=1.5$ ($P = K\rho^{1+1/n}$)

半衰变化

$\frac{\dot{R}}{R} \sim \frac{\dot{M}}{M}$

全对流恒星质光关系 $L \sim MR^{5/2}$



进入简并 or 核反应
由初始温度与密度决定
(主要由质量与温度)

Step 2. 沿亨轨迹 (Henyey 线) 演化. (极小 M 恒星没有此步)

对流停止后,

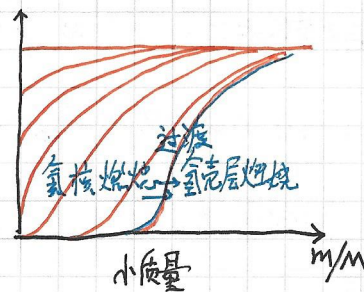
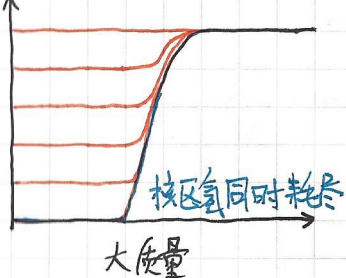


主序演化.

由 P38 对流区示意图, { 大质量恒星: 有对流核
小质量恒星: 无对流核.

所以大质量恒星不能“平稳过渡”.

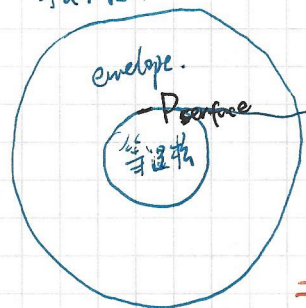
X (氢质量占比)



The Schönberg-Chandrasekhar limit

理想气体等温核与恒星质量之比的上限

> 2M_☉ 才有 (质量太大会坍缩)
核不稳定



$$= \frac{G(M^2 - M_c^2)}{8\pi R^4} \approx \frac{GM^2}{8\pi R^4}$$

边界处温度连续: $T_\infty = T_{en} = \frac{P_{co}}{k} \frac{\mu_{en} m_u}{\rho_{en}}$

ρ_{en} 的量级估计: $M \approx \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_{en}$

式消去 ρ_{en} 与 R : $P_s = \text{const} \cdot \frac{T_\infty^4}{M^2 \mu_{en}^4}$

稳定条件: $P_s < P_{co, \max}$

下面推导等温核 (也近似等压) 压强最大值 $P_{co, \max}$.

等温核引力势能 $E_{gr, \text{core}} = \int_0^{R_{co}} -\frac{Gm}{r} \cdot 4\pi r^2 \rho dr$
 $= \int_0^{R_{co}} -\frac{Gm\rho}{r^2} \cdot 4\pi r^3 dr$
 $= \int_0^{R_{co}} \frac{dP}{dr} \cdot 4\pi r^3 dr = (P \cdot 4\pi r^3) \Big|_0^{R_{co}} - 3 \int_0^{R_{co}} P \cdot 4\pi r^2 dr$
 $\approx 4\pi R_{co}^3 P - 3PV$
 $\approx 4\pi R_{co}^3 P - 3 \frac{M_{co}}{\mu_{mu}} k T_\infty$

近似等 ρ , 那么 $E_{gr, \text{core}} \approx -\frac{3}{5} \frac{GM_{co}^2}{R_{co}}$ 也可以换

那么有

$$4\pi R_{co}^3 P = 3 \frac{M_{co}}{\mu_{mu}} k T_\infty - \frac{3}{5} \frac{GM_{co}^2}{R_{co}}$$

$$P_{co} = \frac{3 M_{co} k T_\infty}{4\pi \mu_{mu}} \cdot \frac{1}{R_{co}^3} - \frac{3}{5} \frac{GM_{co}^2}{R_{co}^4}$$

只有 R_{co} 变化时, P_{co} 有最大值

$$P_{co, \max} \approx \frac{9.9}{G^3 M_{co}^2} \left(\frac{k T_\infty}{\mu_{mu}} \right)^4$$

那么稳定条件 (理想气体等温核能承受住压强)

$P_s < P_{co, \max}$ 即为

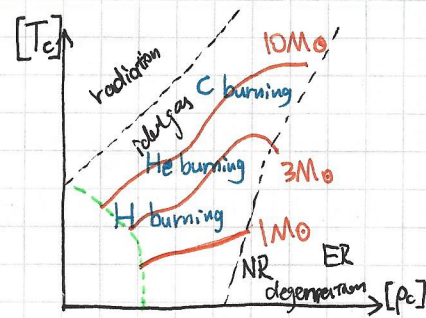
$$\frac{M_{co}}{M} < 0.37 \left(\frac{\mu_{envelope}}{\mu_{core}} \right)^2 \approx 0.10$$

Solar? Helium?

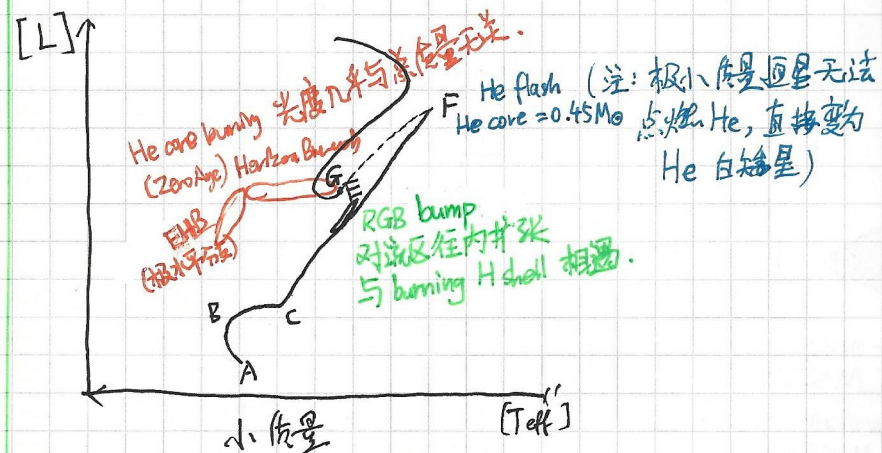


恒星按质量分类

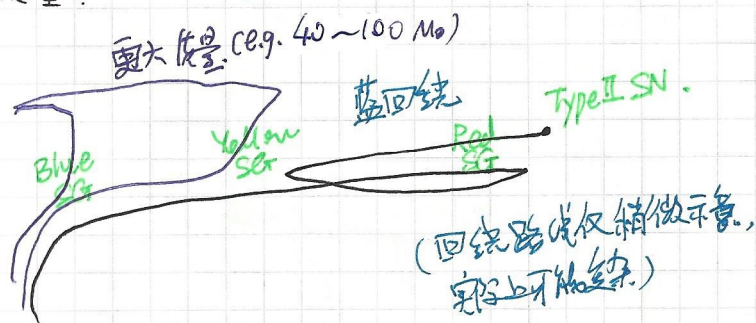
low-mass $0.5M_\odot < M \lesssim 2M_\odot$ MS $\rightarrow$ degenerate He core $\xrightarrow{\text{He flash}}$
 intermediate-mass $2M_\odot \lesssim M \lesssim 8M_\odot$ MS $\xrightarrow{\text{stably}}$ core He burning $\rightarrow$ degenerate CO core
 massive star $M \gtrsim 8M_\odot$ $\xrightarrow{\text{stably}}$ core C burning



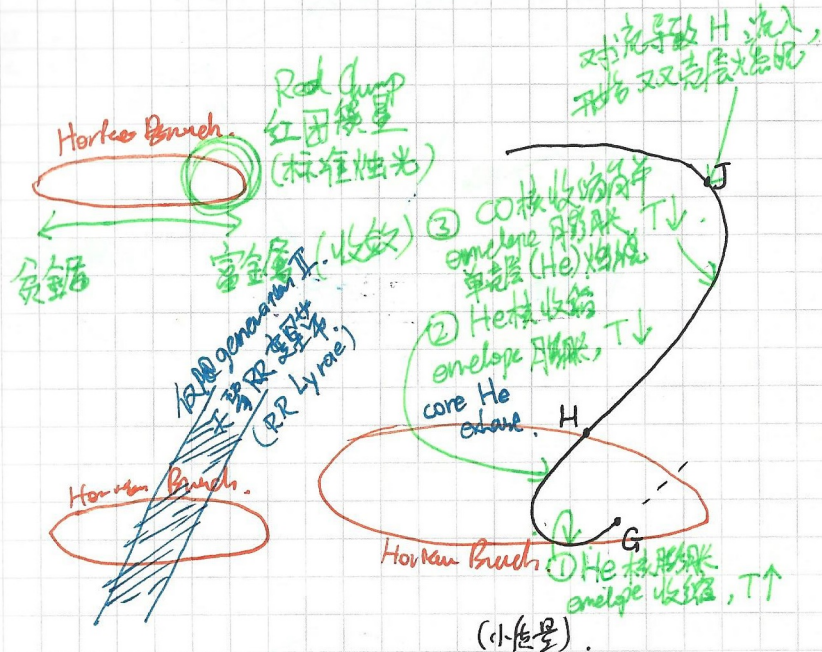
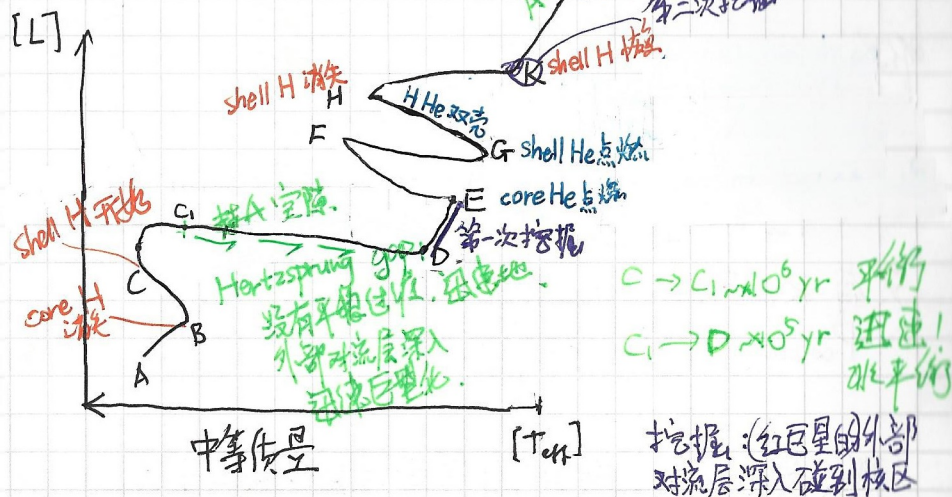
④小侯量



● 大质量



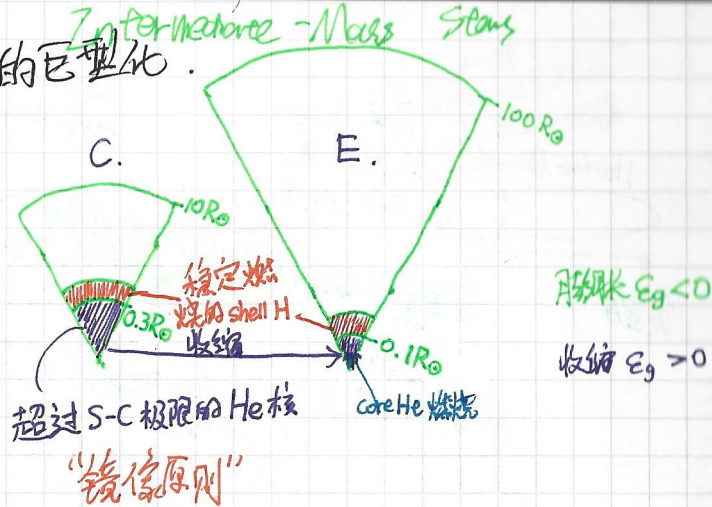
● 中等價



first dredge-up	发生阶段	恒星表面增丰的元素
	RGB,	He
second dredge-up	EAGB,	He N
	(仅有 $M > 4M_{\odot}$)	
3rd DU (钕重)	TPAGB,	He C s-process elements
		限制 CO 核的增长

红巨星的巨型化

思路一:



核收缩 $\left\{ \begin{array}{l} \text{核 } \rho \uparrow \\ \text{shell H. } p \downarrow \end{array} \right. \rightarrow P \downarrow \rightarrow \text{expand.}$

shell H. 线 T

思路二: 多方 $P = K \rho^{1+\frac{1}{n}}$, $\frac{d \ln P}{d \ln \rho} = \frac{n}{n+1}$ ①

状态方程 $(1-\beta)P = \frac{\rho}{\mu m_u} kT$

$$\Rightarrow d \ln P = d \ln \rho - d \ln \mu + d \ln T \quad ②$$

(设 $\beta = \text{const}$)

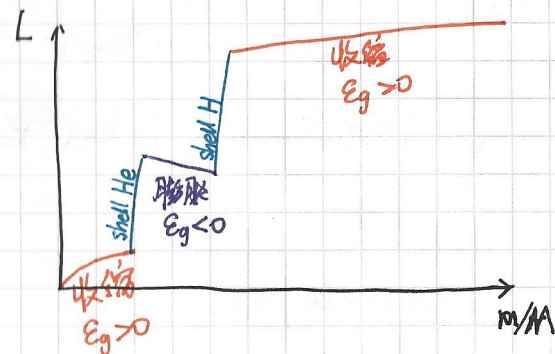
$$①② \Rightarrow \nabla_{\mu} = \nabla + \frac{n}{n+1} - 1$$

取 $\nabla = \frac{r-1}{r} = \frac{1}{4}$ (辐射的绝热指数 对流判据 $r = \frac{4}{3}$)

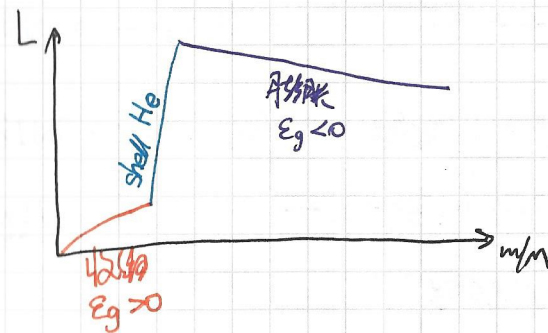
$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \nabla_{\mu} = \frac{1}{n+1}$$

化学梯度 $\nabla_{\mu} = \frac{1}{12}$ 时 $n=5$ 巨型化 (全对流 $n=\frac{3}{2}$, ?)

双壳层 (H, He) 燃烧光度分布 (G → H)



壳层 H 燃烧消失 (由于膨胀到低温区)
只剩 He 单壳层燃烧. (H → K)



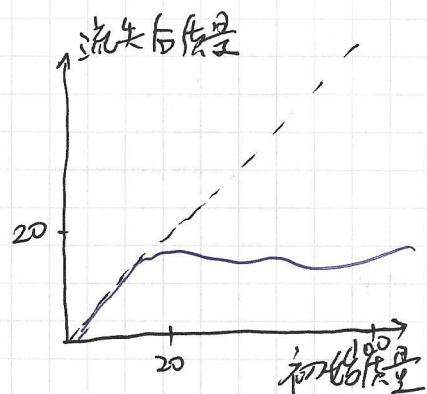
膨胀 → Hayashi Line (全对流, 第二次挖掘)

→ 氢流入, 点燃壳层 H, 再次 (H, He) 双壳层燃烧
→ 光度迅速增加, 进入 AGB.

Mass Loss

大质量恒星 星风损失. typical $v \sim 4000 \text{ km/s}$
 $\frac{dM}{dt} \sim -5 \times 10^{-5} M_{\odot}/\text{yr}$

初始质量越大, 损失越严重



$\sim 10 \sim 20 M_{\odot}$

Mass/ $M_{\odot}$

<15 RSG $\rightarrow$ 蓝回绕 BSG $\rightarrow$ 造父变星 $\rightarrow$ SNII

15~25 RSG $\rightarrow$ SNII

25~40 BSG $\rightarrow$ YSG $\rightarrow$ RSG $\rightarrow$ H包层损失 $\rightarrow$ WNE型WR $\rightarrow$ SNIb

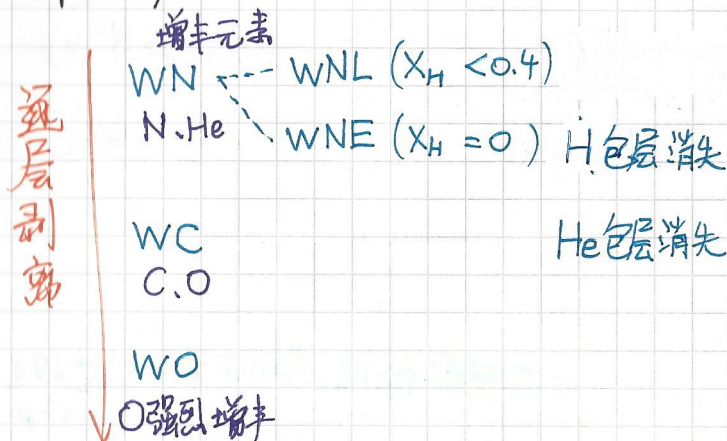
40~60 BSG $\rightarrow$ YSG $\rightarrow$ H, He包层损失 $\rightarrow$ SNIb/c

>60 BSG $\rightarrow$ LBV (亮蓝变星)

$\rightarrow$ H包层损失 $\rightarrow$ WN型WR

$\rightarrow$ He包层损失 $\rightarrow$ WC型WR $\rightarrow$ SNIb/c

Wolf-Rayet Stars 接近爱丁顿光度, 大量抛射物质 ($M > 25$)

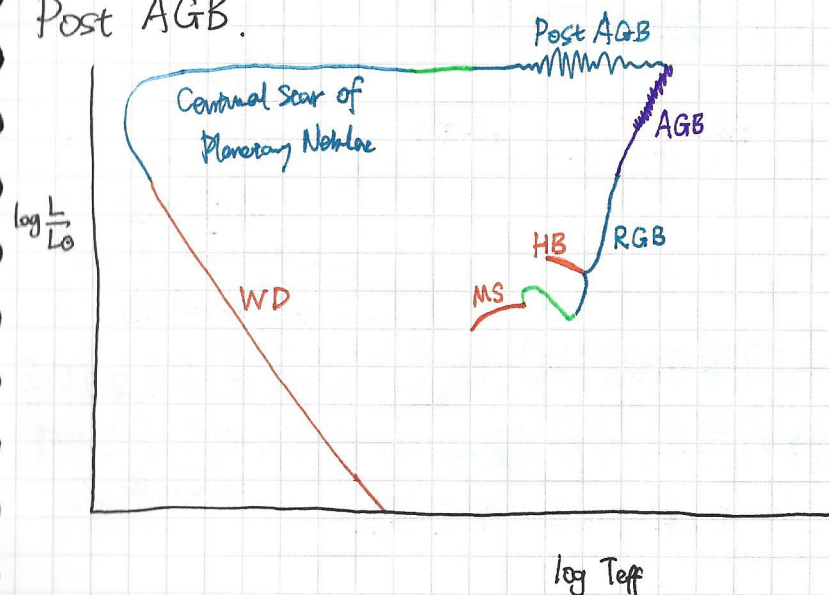


Mira (蒭 藁) 变星 chú gǎo 质量损失巨大, 光度巨大 $P \sim 600 \text{ day}$
 $(\sim 10^{-8} \sim 10^{-4} M_{\odot}/\text{yr})$

强烈星风 (superwind)

$\rightarrow$ H包层几乎全部抛出 $\rightarrow$ AGB结束

Post AGB.

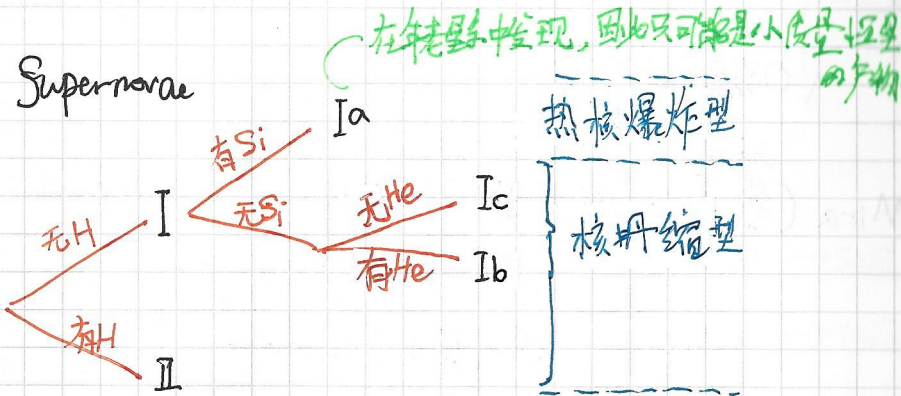


log T_{eff}

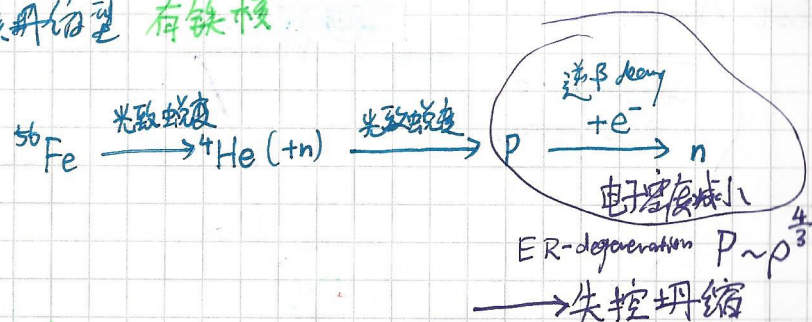
Novae. 频率 ~ 100 Supernovae

白矮星吸积伴星物质 $T \sim 10^7 K$, 点燃表面 H
(内部温度更高, 壳层部分先点燃)

Note. 大质量白矮星爆发比小质量更频繁,



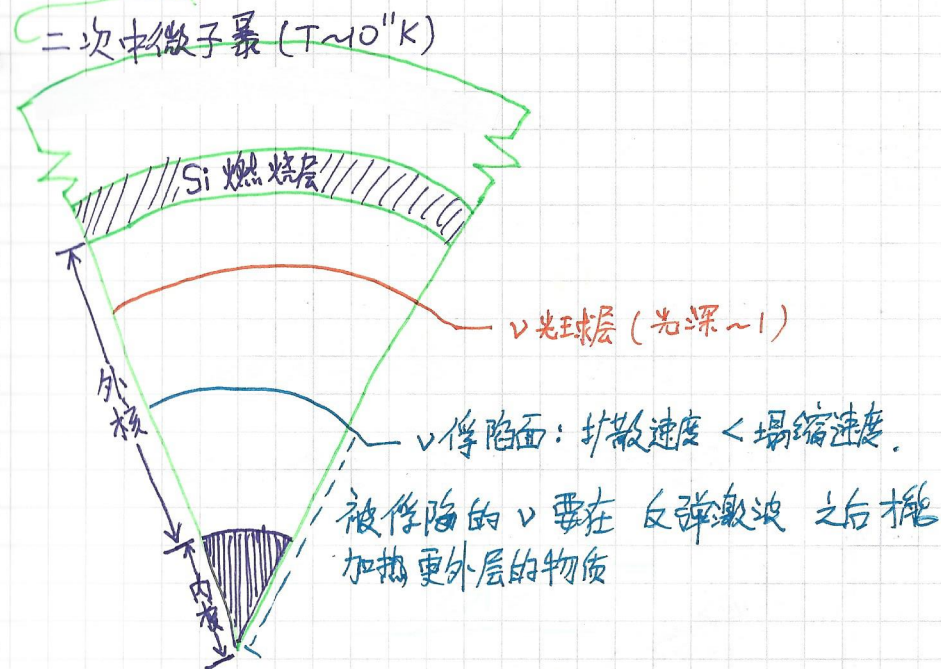
内核坍缩型 有铁核



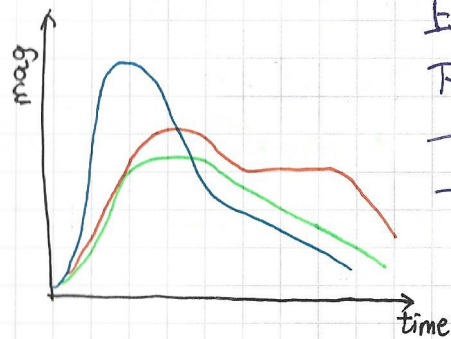
Note: 内核同模坍缩(快), 外核自由下落(慢),
内核坍完后, 外核撞到内核上被反弹(反弹激波)
→ 瞬爆, 但光致蜕变吸热

引力势能 ($\sim \times 10^{46} J$)

- 99% → 中微子 不透明, 再加热核 → 二次中微子暴 ($T \sim 10^{11} K$)
- ~1% → 核过程 (eg. 铁核光致蜕变)
抛出的外壳动能 (动能)
电磁辐射



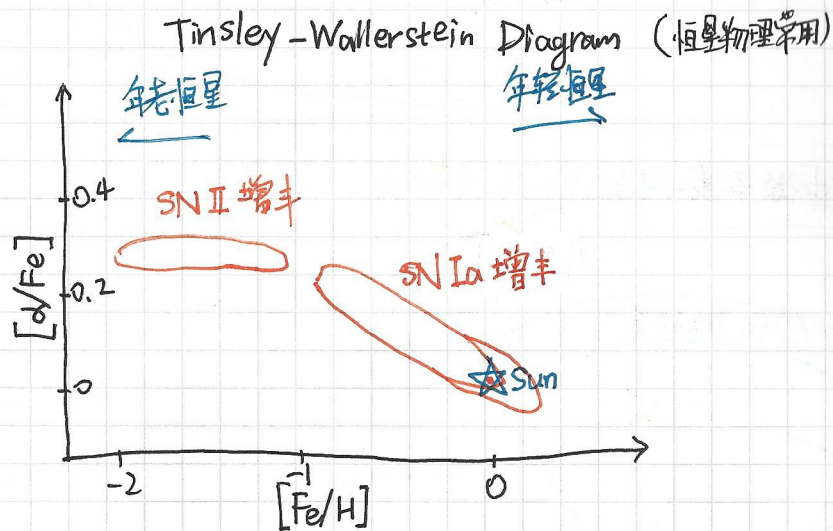
SNa 光变曲线



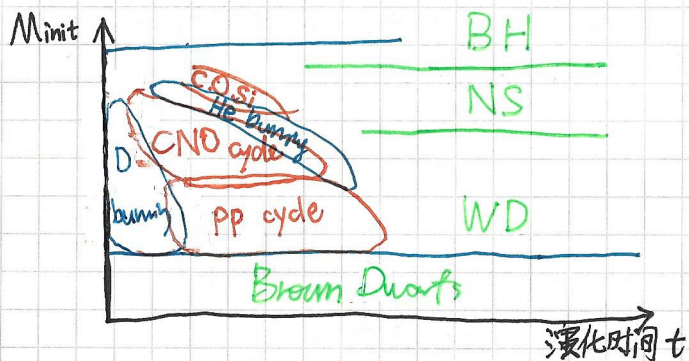
上升: 光厚, 表面积 ↑
下降: 光薄.

—— 线型下降: 衰变 ($\text{slope} \sim T_{1/2}$)
—— 平台段: 远离恒星的氢离子壳

WD + WD $\rightarrow$ Supernovae (若质量超过 M_{Ch})
 NS + NS $\rightarrow$ Kilonovae.



不同质量恒星的核反应演化概览.



理论上存在的“恒星”.

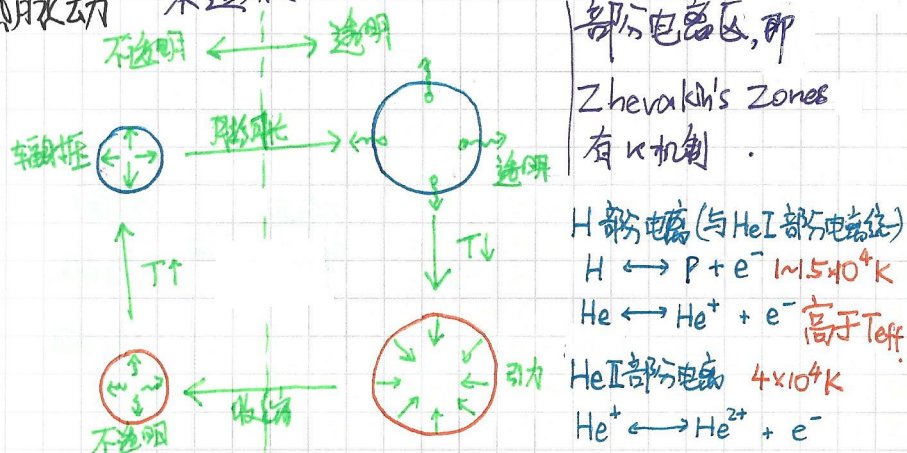
Dark star } 第一代恒星候选者 通过暗物质湮灭供能?
 Quasi star } 物质落入BH供能.

Blitzar 快速旋转的NS, 转速降低时坍塌为BH, 外部磁力线断开, 产生FRB.

Thorne-Zytkow Object SNIa后, NS进入伴星(RG or RSg) 与其内核合并, 产生丰度异常

部分电离区 不太靠近表面, 也不太深(在对应区内)
 即 $T_{\text{eff}} = 5500 \sim 7500 \text{ K}$.

热脉动 不适用于 Kramers 近似! 因为部分电离!

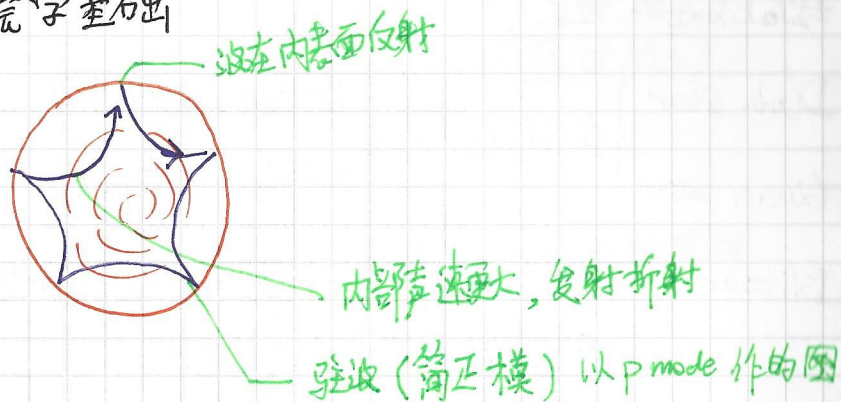


K 机制: 不透明度在坍塌时增加 —— 热脉动的条件.
 其他元素如 Fe 亦可产生 K 机制 (不适合 Kramers 近似 $\kappa \sim T^{-3.5}$)

r 机制: 相邻区域通过辐射传能 进一步电离 部分电离区.

E 机制: 内部核燃烧的脉动. (观测证据)

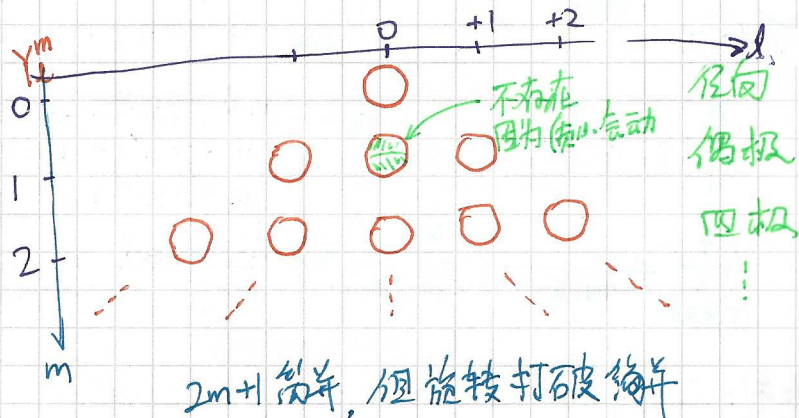
星震学基础



基础原理: 微扰. $\delta\rho, \delta T, \delta P$.

Laplace eq. (球坐标).

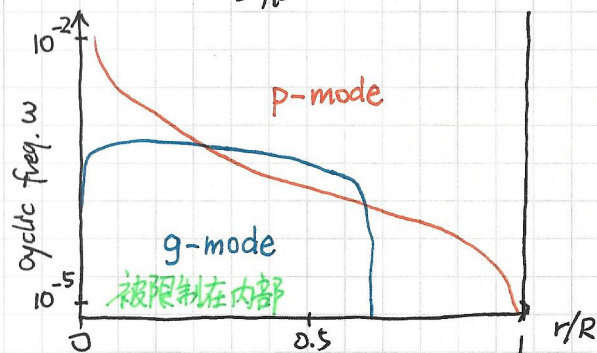
其解由 $\frac{1}{\sin\theta}, Y_l^m(\theta, \phi), \partial_\theta Y_l^m, \partial_\phi Y_l^m, \exp(-i2\pi\nu t)$ 等构成.



回复力

- 压力 $p \text{ mode (high freq.)}$
- 重力/浮力 $g \text{ mode (low freq.)}$

日震



观测: Fourier Trans. 非常高的时间分辨率.

光变曲线: 时域 $\rightarrow$ 频域. 得到 freq 不同的 mode.

需要长时间连续观测. $\rightarrow$ 全球联测 也是南极地区观测的优势

高精度光谱仪. 谱线轮廓变化 (Doppler eff.)
即谱线展宽的不同形状