高等数学 · 无穷级数

21305337 *Betelgeuxe*

2022 年 6 月 20 日

目录

1 基本概念与记号 **1**
1.1 数项级数的敛散性 . . . 1
1.2 柯西收敛原理 (柯西准则) . . . 1
1.3 收敛级数的性质 . . . 1

2 正项级数的收敛判别法 **2**
2.1 [正项级数]比较判别法 . . . 2
2.2 [正项级数]比式判别法 (达朗贝尔判别法) . . . 2
2.3 [正项级数]根式判别法 (柯西判别法) . . . 3
2.4 [正项级数]柯西积分判别法 . . . 3

3 任意项级数 **4**
3.1 [交错级数]莱布尼兹判别法 . . . 4
3.2 绝对收敛与条件收敛 . . . 4
3.3 阿贝尔判别法、狄利克雷判别法 . . . 5
3.3.1 [级数的积]狄利克雷判别法 . . . 5
3.3.2 [级数的积]阿贝尔判别法 . . . 5

4 函数项级数 **6**
4.1 基本概念与记号 . . . 6
4.1.1 函数项级数 . . . 6
4.1.2 函数序列 . . . 6
4.2 一致收敛的判定 . . . 6
4.2.1 序列的一致收敛 . . . 6
4.2.2 函数项级数的一致收敛 . . . 7
4.2.3 一致收敛的柯西准则 . . . 7
4.2.4 [函数项级数]强级数判别法 . . . 7
4.2.5 一致有界 . . . 8
4.2.6 [函数项级数的积]狄利克雷判别法 . . . 8
4.2.7 [函数项级数的积]阿贝尔判别法 . . . 8

4.3 一致收敛的性质 . . . 8
4.3.1 和函数的连续性 (求和与求极限可交换顺序) . . . 8
4.3.2 逐项求积 (求和与积分可交换顺序) . . . 8
4.3.3 逐项求导 (求和与求导可交换顺序) . . . 8

5 幂级数 9
5.1 收敛半径 . . . 9
5.1.1 阿贝尔定理 . . . 9
5.1.2 比式求 R 法 . . . 9
5.1.3 根式求 R 法 . . . 9
5.2 幂级数的性质 . . . 9
5.2.1 四则运算 . . . 9
5.2.2 内闭一致性 . . . 10
5.2.3 连续性、可积性、可微性 (前一节的推论) . . . 10

6 泰勒级数 11
6.1 部分基本定义与定理 . . . 11
6.2 求展开式的步骤 . . . 11
6.3 一些常用的初等函数的泰勒展开式 . . . 12

1 基本概念与记号

通项 $a_n, n \in \mathbb{Z}$

（无穷）数列 $\{a_n\}, n \in \mathbb{Z}$

（级数的）部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

部分和序列 $\{S_n\}$

级数的和/常数项无穷级数 $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

1.1 数项级数的敛散性

$n \to \infty$ 时, 若 $\{S_n\} \to S$, 则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **收敛**, 若 $\{S_n\}$ 没有极限, 则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **发散**.

证明数列发散的一些方法

- 证明不同的子数列有不同的极限
- $a_n \not\to 0 (n \to \infty) \Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$发散

证明数列收敛的一些方法

- $\varepsilon - N$ 定义
- 单调有界
- 夹逼定理
- 利用重要极限的结论

1.2 柯西收敛原理（柯西准则）

$\{a_n\}$ 有极限 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{st.} \forall n, m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon.$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$收敛 $\Longleftrightarrow$ 对$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{st.}$对$\forall n \geq N, p \in \mathbb{Z}^+, \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$

1.3 收敛级数的性质

- 若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S_1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = S_2$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (pa_k + qb_k) = pS_1 + qS_2$, $p, q \in \mathbb{R}$.
- 修改级数的有限项, 级数的敛散性不变.
- 给收敛级数的项任意加括号后, 仍然收敛到原级数的和; 给级数任意加括号后发散, 则原级数发散.

2 正项级数的收敛判别法

正项级数 每项都非负的级数称为正项级数.

命题 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n_k$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{S_n\}$ 有上界.

2.1 [正项级数]比较判别法

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $u_n \leq v_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛}.$$

极限形式

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = h$, 且 $0 < h < +\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{与} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{敛散性相同}.$$

2.2 [正项级数]比式判别法（达朗贝尔判别法）

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, 则

当$l < 1$, 级数收敛,

当$l > 1$, 级数发散,

当$l = 1$, 可能收敛也可能发散.

拉阿伯判别法 *(针对 $l = 1$ 的情况)

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \neq 0)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = R$, 则

当$R < 1$, 级数发散,

当$1 < R \leq +\infty$, 级数收敛,

当$R = 1$, 可能收敛也可能发散.

2.3 [正项级数]根式判别法 (柯西判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, 则

当$l < 1$, 级数收敛,

当$l > 1$, 级数发散,

当$l = 1$, 可能收敛也可能发散.

2.4 [正项级数]柯西积分判别法

无穷积分

若极限 $\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并记

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\mathrm{d}x,$$

若 $A \to +\infty$ 时 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 没有极限, 则称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \neq 0)$, 若 $\exists f(x) > 0$, $f(x) \searrow, \mathrm{st.} u_n = f(n), (n = 1, 2, \cdots)$ 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \neq 0) \quad 与 \quad \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \quad 敛散性相同.$$

3 任意项级数

交错级数 一项正、一项负交错排列的级数.

3.1 [交错级数]莱布尼兹判别法

若**交错级数** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 满足 $u_n > 0, u_{n+1} \leq u_n, \lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则

级数收敛，且S与u_1同号,$|S| < |u_1|$.

3.2 绝对收敛与条件收敛

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\text{收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}}$$

绝对收敛 若正项级数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**.

条件收敛 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**.

Tips

可以利用“绝对收敛级数”和“比值判别法”证明：若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$，则

当$l < 1$, 级数收敛,
当$l > 1$, 级数发散,
当$l = 1$, 可能收敛也可能发散.

级数的重排 映射 $f : \{1, 2, \cdots\} \to \{1, 2, \cdots\}$.

绝对收敛级数的性质

- 绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{u_n>0}u_n + \sum_{u_n<0}u_n$，其中 $\sum_{u_n>0}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|u_n| + u_n}{2}$.
- 收敛的正项级数 (绝对收敛级数) 重排后仍然收敛 (绝对收敛) 于原来的和，即绝对收敛级数满足**加法交换律** (无限项).
- **柯西定理** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛于 A, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛于 B，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$ 绝对收敛于 AB，即绝对收敛的级数有乘法运算.

3.3 阿贝尔判别法、狄利克雷判别法

阿贝尔变换（离散型分部求和公式）、阿贝尔引理（阿贝尔不等式）

设有数列 $\{a_n\},\{b_n\}$,$B_n=\sum_{i=1}^{k}a_n$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i-1})B_i+a_nB_n$$

设数列 $\{a_n\}$ 是单调的,$B_n=\sum_{i=1}^{k}a_n$ 满足 $|B_i|\le M$, 则有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\le M(|a_1|+2|a_n|)$$

3.3.1 [级数的积]狄利克雷判别法

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 数列$\{a_n\}$单调 ; 部分和数列 $\left\{\sum_{i=1}^{n}b_i\right\}$ 有界 , 则 $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ 收敛.

注: 其中 $\{a_n\}$ 不需要求和, 实际上在证明过程中求了差分; 而 $\{b_n\}$ 需要求和.
使用狄利克雷判别法的关键是如何拆分成两个子数列的积.
莱布尼兹判别法是狄利克雷判别法的特例.

3.3.2 [级数的积]阿贝尔判别法

若 数列$\{a_n\}$单调有界 ; 级数 $\sum_{i=1}^{\infty}b_i$收敛 , 则 $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ 收敛.

Tips

阿贝尔判别法相比狄利克雷判别法,$\{a_n\}$ 的条件更弱,$\{b_n\}$ 的条件更强.
狄利克雷判别法和阿贝尔判别法常用于判别条件收敛, 判别绝对收敛有时用更弱的结论即可.

4 函数项级数

4.1 基本概念与记号

4.1.1 函数项级数

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

收敛点 (发散点) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛 (发散), 则称 x_0 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点 (发散点).

收敛域 (发散域) 函数项级数的全体收敛点组成的集合, 记作 X.

和函数 $S(x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in X.$

4.1.2 函数序列

函数序列 $\{f_n(x) | n = 1, 2, \cdots\}$

收敛点 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 存在, 则称 $\{f_n(x)\}$ **在** x_0 **点收敛**, 称 x_0 为 $\{f_n(x)\}$ 的收敛点.

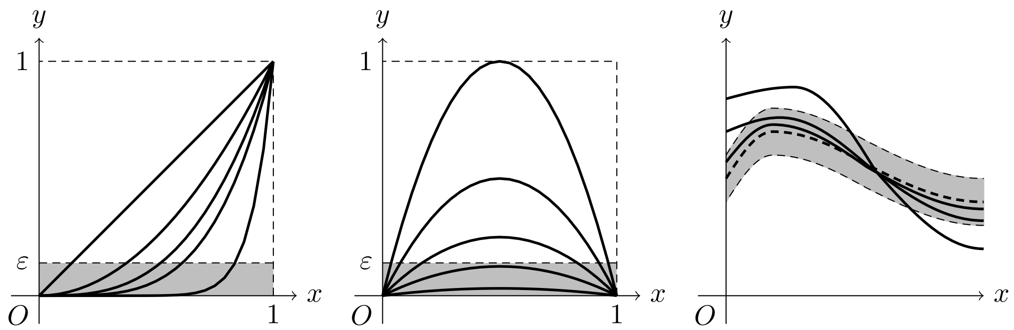
收敛域 函数序列的全体收敛点组成的集合, 也记作 X.

极限函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ \forall x \in X.$

4.2 一致收敛的判定

4.2.1 序列的一致收敛

定义 若 $f_n \to f(x)$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N($ N与x无关 , 可与 ε 有关)st. 对 $\forall x \in X$, 当 $n > N$ 时 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上**一致收敛**于 $f(x)$,
记作 $f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ x \in X\ (n \to \infty)$.($\varepsilon - N$ 定义)



可证明序列一致收敛的两个命题

- 设 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上收敛到 $f(x)$, 若 $\exists$ 数列 $\{a_n\}, a_n \to 0(n \to \infty)$ st.

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n,\ x \in X,\ n > N,$$

则 $f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ x \in X\ (n \to \infty)$.(P241 命题 1)

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛 $\Longrightarrow u_n(x) \rightrightarrows 0,\ x \in X\ (n \to \infty)$.(P243 定理 1)

可证明序列不一致收敛的两个命题

- 设 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上收敛到 $f(x)$, 若 $\exists\{x_n\}\ (x_n \in X)$ st. 当 $n > N$ 时,

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq l, \quad l > 0\text{为常数}$$

$$\text{或}\quad |f_n(x_n) - f(x_n)| \to k \neq 0, \quad k\text{为常数}$$

则 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上不一致收敛.(P242 命题 1,2)

Tips: 通常使 $x_n \to x_d$ 的速度非常快, 其中 $x_d \notin X$.

- $u_n(x)$ 在 X 上不一致收敛于 0 $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上不一致收敛.(P243 定理 1 之逆否命题)

4.2.2 函数项级数的一致收敛

定义 设函数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 中的每一项在 X 中有定义, 若部分和数列 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ 在集合 X 上一致收敛, 则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 X 上**一致收敛**.

4.2.3 一致收敛的柯西准则

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 X 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$

$$\text{对 } \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon),\text{st. 对 } \forall p \in \mathbb{Z}^+, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \right| < \varepsilon \text{ 对 } \forall x \in X \text{ 成立.}$$

4.2.4 [函数项级数]强级数判别法

若 $|u_n(x)| \leq a_n,\ \forall x \in X,\ n = 1, 2, \cdots$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛 $\Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 X 上一**致收敛** (且绝对收敛), 并称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 的强级数.

4.2.5 一致有界

定义 设 $\{f_n(x)\}$ 在集合 X 上有定义，若 $\exists$ 常数 M,st.$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in X$, 都有 $|f_n(x)| \leq M$, 则称 $\{f_n(x)\}$ 一致有界.

4.2.6 [函数项级数的积]狄利克雷判别法

若 (1) 对 $\forall x \in X$, $\{a_n(x)\}$ **对** n **单调**, 且 $a_n(x)$ **一致收敛于 0**$(x \in X)$,

(2) 部分和序列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right\}$ 在 X 上**一致有界**,

则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ 在 X 上**一致收敛**.

4.2.7 [函数项级数的积]阿贝尔判别法

若 (1) 对 $\forall x \in X$, $\{a_n(x)\}$ **对** n **单调**且在 X 上**一致有界**,

(2) 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ 在 X 上**一致收敛**,

则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ 在 X 上**一致收敛**.

4.3 一致收敛的性质

4.3.1 和函数的连续性（求和与求极限可交换顺序）

在闭区间 $[a, b]$ 上，

$$\begin{cases} \text{每一项}u_n\text{都连续} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\text{一致收敛} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\text{连续} \\ \lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) \end{cases}$$

4.3.2 逐项求积（求和与积分可交换顺序）

在闭区间 $[a, b]$ 上，

$$\begin{cases} \text{每一项}u_n\text{都可积} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\text{一致收敛} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\text{可积} \\ \int_a^b \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x \end{cases}$$

4.3.3 逐项求导（求和与求导可交换顺序）

在闭区间 $[a, b]$ 上，

$$\begin{cases} \text{每一项导函数}u_n'\text{都连续} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\text{点点收敛} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)\text{一致收敛} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\text{可导} \\ \left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} {u_n}'(x) \end{cases}$$

5 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

5.1 收敛半径

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛域有三种情况:

1) 一个点 $\{x_0\}$; 2) 以 x_0 为中心的区间, 可能是开区间、闭区间、半开半闭区间; 3)$\mathbb{R}$.

5.1.1 阿贝尔定理

若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 x_1 收敛, 则对 $\forall x < |x_1|$ **绝对收敛**.

若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 x_2 发散, 则对 $\forall x > |x_2|$ 发散.

5.1.2 比式求 R 法

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R 满足:

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & 0 < l < +\infty, \\ 0, & l = +\infty, \\ +\infty, & l = 0. \end{cases}$$

5.1.3 根式求 R 法

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R 满足:

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & 0 < l < +\infty, \\ 0, & l = +\infty, \\ +\infty, & l = 0. \end{cases}$$

5.2 幂级数的性质

5.2.1 四则运算

在 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 都收敛的**开区域**内, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j x^n$$

5.2.2 内闭一致性

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 则

(1) 对$\forall$正数$b < R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[-b, b]$上一致收敛;

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 收敛, 则它在 $[0, R]$ 上一致收敛;

(3) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -R$ 收敛, 则它在 $[-R, 0]$ 上一致收敛.

5.2.3 连续性、可积性、可微性 (前一节的推论)

连续性　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内连续.

又若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ (或 $x = -R$) 处收敛, 则 $S(x)$ 在 $x = R$ (或 $x = -R$) 点处左 (右) 连续.

可积性　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内任一闭区间上可积, 且可逐项求积分, 且逐项积分所得的新幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径 $R_1 = R$.

可微性　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导, 且可逐项求导, 且逐项求导所得的新幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径 $R_2 = R$.

　　更进一步, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内任意阶可导, 且可逐项求任意阶导数, 它们的收敛半径都是 R.

6 泰勒级数

6.1 部分基本定义与定理

设 $y=f(x)$ 在 x_0 处有任意阶导数, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$ 称为 $f(x)$ 的**泰勒级数**, 记作

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n.$$

若一个函数的泰勒级数收敛到这个函数, 称其泰勒级数为其**泰勒展开式**.

当 $x_0=0$ 时 , $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**.

定理 幂级数展开式具有唯一性.

定理 设函数 $f(x)$ 在含有点 x_0 的某个区间 (a,b) 内有任意阶的导函数, 则当 $x\in(a,b)$,

$$\boxed{f(x)\text{能展开为泰勒级数}\iff\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0}$$

其中 $R_n(x)$ 为 $f(x)$ 的泰勒公式的余项, 可表示成

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}\Big(x_0+\theta\left(x-x_0\right)\Big)\left(x-x_0\right)^{n+1},\quad 0<\theta<1,$$

$$\text{或}\quad R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\left(x-x_0\right)^{n+1},\quad x_0<\xi<x\text{ 或 }x<\xi<x_0.$$

6.2 求展开式的步骤

Step 1 求导, 写出泰勒级数 (展开式);
Step 2 利用幂级数的性质 (可用 “比式求 R 法” “根式求 R 法”) 求出收敛半径, 并进一步求出收敛域.
Step 3 在收敛域上讨论 $R_n(x)\to 0$ 何时成立, 得出展开式成立的区间.

6.3 一些常用的初等函数的泰勒展开式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \qquad (-1 < x \leqslant 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$