多元函数

仅供学习参考，勿作商业用途
作者：参宿四星云
2022年4月15日

极限 $def:\ \delta-\epsilon$

- 区域 $def:$ 连通的非空开集
  - 邻域（开集）
    - 圆（球）邻域
    - 方邻域
  - 性质
    - 内点&外点&边界点
      - ∂E 表示集合 E 的全体边界点的集合
    - 开集&闭集
      - 闭区域：$\overline{G}=G\cap\partial G$，其中 G 为区域
    - 连通性
    - 有界性&无界性
- 累次极限&全面极限
  - $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 是全面极限，
  - $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 是累次极限。
- 复合函数的极限定理 P265
- 保不等号性&夹逼定理
- 四则运算法则
- 没有极限的判定：P沿两条路径趋近同一点时，f(P)趋于不同的常数。

微分与导数

- 连续性 $def:\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$
  - 复合函数的连续性
    若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，$g(z)$ 在点 $z_0=f(x_0,y_0)$ 处连续，则 $u=g(f(x,y))$ 在点 (x_0,y_0) 连续
  - 有界性定理
  - 最大（小）值定理
  - 介值定理
- 高阶偏导数
  - 二阶混偏连续，则相等
- 全微分 $def:\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$
  其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，
  A,B 只与 (x_0,y_0) 有关，而与 $\Delta x,\Delta y$ 无关
  - 全微分计算公式：$\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$
- 复合函数微分
  - 链式法则
  - 一阶全微分的形式不变性
  - 高阶微分P291
- f 可微
  - f 有偏导且有方向导数
  - f 连续
  - f_x,f_y 连续
- 方向导数 $def:$ 设 $\vec{l}$ 的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$
  则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{x=0}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$
  - 方向导数计算公式：
    $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$
    $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$
- 梯度 $def:$
  $\nabla f|_{P_0}$ 或 $\mathrm{grad}\ f|_{P_0}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right|_{P_0}$
  - 梯度的计算公式：
    $\nabla f|_{(x_0,y_0)}=\big(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\big)$
    $\nabla f|_{P_0}=\big(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0)\big)$
    - 梯度的运算法则及公式（类似微分四则运算公式与多元复合函数的链式法则）

泰勒公式

- 二元函数的微分中值定理
  若 $z=f(x,y)$ 的偏导数在区域 D 连续，直线段 $P_0(x_0,y_0)P_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\subset D$ 则存在 $0<\theta<1$，
  $f(P_1)=f(P_0)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y$
- 二元函数的泰勒公式
  设 $D\subset R^2$ 为一区域，而函数 $f(x,y)\in C^{n+1}(D)$.
  直线段 $P_0(x_0,y_0)P_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\subset D$，则有
  $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\mathrm{d}^kf(x_0,y_0)+R_n$
  其中$\mathrm{d}^kf(x_0,y_0)=(\mathrm{d}x\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\dfrac{\partial}{\partial y})^kf$
  - 佩亚诺型余项 $R_n=o(\rho^n)$
  - 拉格朗日余项 $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$，$0<\theta<1$
    - 余项估计
      若存在常数 M，$\left|\dfrac{\partial^{n+1}}{\partial x^p\partial^{n+1-p}}\right|\le M$，$p=0,1,\cdots,n+1$，
      则 $|R_n|\le\dfrac{M}{(n+1)!}(2\rho)^{n+1}$
  - 泰勒多项式具有唯一性

空间曲面

- 圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(\theta,z)=R\cos\theta\\y=y(\theta,z)=R\sin\theta\\z=z(\theta,z)=z\end{cases}$
- 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(\theta,z)=R\sin\phi\cos\theta\\y=y(\theta,z)=R\sin\phi\sin\theta\\z=z(\theta,z)=R\cos\phi\end{cases}$，$\begin{cases}0\le\phi\le\pi\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$
- 切&法
  - 隐函数形式 曲面 $F(x,y,z)=0$ 在 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 的
    切平面法向量：$\vec{n}=\big(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\big)$
    法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$
    切平面方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$
  - 显函数形式 曲面 $z=z(x,y)=0$ 在 $z_0=(x_0,y_0)$ 的
    切平面法向量：$\vec{n}=\big(z_x(x_0,y_0),z_y(x_0,y_0),-1\big)$
    法线方程：$\dfrac{x-x_0}{z_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{z_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$
    切平面方程：$z_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$
  - 参数方程形式 曲面 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$，$(u,v)\in D$，且$\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq\vec{0}$ 时，曲面上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的
    切平面法向量：$\vec{n}|_{(u_0,v_0)}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}=\Big(\dfrac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)}\dfrac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)}\dfrac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}\Big)\Big|_{(u_0,v_0)}$
    其中$\vec{r}_u=(x_u,y_u,z_u)|_{(u_0,v_0)}$为 参数曲线$l_1$：$\begin{cases}x=x(u,v_0)\\y=y(u,v_0)\\z=z(u,v_0)\end{cases}$ 在 P_0 处的 切向量
    切平面方程：$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$

隐函数

- 隐函数存在定理
  - $Thm1:$
    函数 $F(x,y)$ 满足：①$P_0(x_0,y_0)\subset D$; ②$F\subset C(D)$; ③$F|_{P_0}=0$; ④$F'_y(x_0,y_0)\neq0$;
    则 $F(x,y)=0$ 在 D 内存在唯一的 $y=f(x)$，满足：
    ①$f'(x)$ 连续; ②$y_0=f(x_0)$; ③$F(x,f(x))\equiv0$; ④$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$
  - $Thm2:$
    函数 $F(x,y,z)$ 满足：①$P_0(x_0,y_0,z_0)\subset D$; ②$F\subset C(D)$; ③$F|_{P_0}=0$; ④$F'_y(x_0,y_0,z_0)\neq0$;
    则 $F(x,y,z)=0$ 在 D 内存在唯一的 $z=f(x,y)$，满足：
    ①$z=f(x,y)$ 的偏导数连续; ②$z_0=f(x_0,y_0)$; ③$F(x,y,f(x,y))\equiv0$; ④$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$
- 隐函数的导数的求法
  - 法一：直接使用"隐函数存在定理"中的公式
  - 法二：全微分方法（$0=\mathrm{d}F$）
  - 法三：设（设 $z=z(x,y)$，再求导）
  - 方程组的情况
    - 求解方法：直接联立or克莱姆法则
    - 判别式：雅克比行列式 $J=\dfrac{\mathrm{D}(F,G)}{\mathrm{D}(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u&F_v\\G_u&G_v\end{vmatrix}$（以二阶为例）
- 逆映射存在定理 条件：$x=x(u,v),y=y(u,v)\subset C(D)$ 且 $J\neq0$

极值 $def:$ $\exists U^\circ(P_0)\ \mathrm{st.}\forall P\in U^\circ(P_0),f(P)<f(P_0)$

- 极值的必要条件（稳定点、可疑极值点）$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\\dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$
- 极值的充分条件（一种判定）
  使用前提：$z=f(x,y)\subset C^2(U(x_0,y_0))$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=0$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0$
  设 $A=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$，$B=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，$C=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$，
  若 $B^2-AC<0$，$A<0$（或 $C<0$），则 $f(x_0,y_0)$ 是极大值;
  若 $B^2-AC<0$，$A>0$（或 $C>0$），则 $f(x_0,y_0)$ 是极小值;
  若 $B^2-AC>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值;
  若 $B^2-AC=0$，则 $f(x_0,y_0)$ 可能是极值。
- 二元函数的最值
  可疑点：
  ① 不可导点：边界点（转化为一元函数的最值问题） & 其他不可导点
  ② 内部的极值点
- 条件极值
  - 拉格朗日乘数法（二元情形）$\begin{cases}z=f(x,y)\ \text{——目标函数}\\\phi(x,y)=0\ \text{——约束条件}\end{cases}$
    引入辅助变量 λ 和辅助函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$,
    则原方程组为 $\begin{cases}L_x(x_0,y_0,\lambda_0)=0\\L_y(x_0,y_0,\lambda_0)=0\\L_\lambda(x_0,y_0)=\phi(x_0,y_0)=0\end{cases}$
  - 拉格朗日乘数法（多元情形）$\begin{cases}z=f(x_1,\cdots,x_n)\\\phi_1(x_1,\cdots,x_n)=0\\\vdots\\\phi_m(x_1,\cdots,x_n)=0\end{cases}$
    引入辅助变量 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和辅助函数 $L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k\phi_k(x_1,\cdots,x_n)$,
    则原方程组为 $\begin{cases}L_{x_1}(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=0\\\vdots\\L_{x_n}(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=0\\L_{\lambda_1}(x_1,\cdots,x_n)=\phi_1(x_1,\cdots,x_n)=0\\\vdots\\(x_m,\cdots,x_n)=\phi_m(x_1,\cdots,x_n)=0\end{cases}$