高等数学 · 常微分方程

21305337 Betelgeuxe

仅供学习参考，勿作商业用途

目录

1　基本概念

通解　设 $y=y(x)$, 若 n 阶常微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 有解 $y=\varphi(x;C_1,\cdots,C_n)$, 其中 $C_1,\cdots,C_n$ 为独立的 n 个任意常数, 则此解为一个通解.

特解　特解任何一个不包含任意常数的解都称作特解.

奇解　不包含于通解的解.

通积分　以隐函数 $\varPhi(x,y;C_1,\cdots,C_n)=0$ 的形式给出的通解.

上述独立性的判定　$\dfrac{\mathrm{D}(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\mathrm{D}(C_1,C_2,\cdots,C_n)}\neq 0$, 将 $\varphi(x;C_1,\cdots,C_n)$ 看做 $C_1,\cdots,C_n$ 的函数 (仅用于雅克比行列式中的求导) .

初值问题　求方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 满足初始条件

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y_1, \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1} \end{cases}$$

的解，其中 $x_0,y_0,\cdots,y_{n-1}$ 是预先给定的常数.

积分曲线　常微分方程的解的图形称作积分曲线.

2　初等积分法

2.1　变量分离的方程

2.1.1　直接积分法（用于变量分离的方程）

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=f(x)\cdot g(y),\ g(y)\neq 0 \\ \int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}&=\int f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

2.1.2 换元法（化为变量分离的方程）

1° $y' = f(ax+by+c)$, $\underline{\underline{\text{设}z = ax+by+c}}$.

2° $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$(齐次方程）,$\underline{\underline{\text{设}u = \dfrac{y}{x}}}$, 则$y' = u + xu'$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{f(u)-u}{x}.$$

3° $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$,

1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$,(求交点后平移换元，转为齐次方程）

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x_0, y_0)$$

$$\underline{\underline{\begin{cases} u = x - x_0, \\ v = y - y_0, \end{cases}}} \text{则}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right) = h\left(\frac{u}{v}\right),$$

2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$,(分子分母换同一个元，直接达成变量分离）

$$\underline{\underline{z = a_1x+b_1y,}} \text{则}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a_1 + b_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z+c_1}{kz+c_2}\right).$$

2.2 一阶线性 ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)\cdot y = Q(x), \begin{cases} Q(x) \equiv 0, \text{齐次线性方程} & (1) \\ Q(x) \not\equiv 0, \text{非齐次线性方程} & (2) \end{cases}$$

2.2.1 一阶线性 ODE 的一些性质

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)\cdot y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)\cdot y = Q(x) \qquad (2)$$

(1) 的任意两个解之和仍为 (1) 的解

(1) 的任一解的常数倍仍为 (1) 的解

(1) 的任一解 + (2) 的任一解 = (2) 的一个解

(2) 的任意两个解之差为 (1) 的解

(1) 的通解 + (2) 的任一特解 = (2) 的通解.

2.2.2 一阶线性非齐次 ODE

线性非齐次微分方程 $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ 的解法

第一步：求对应的齐次微分方程（是变量分离的）的通解：

$$y' + P(x) \cdot y = 0 \implies y = C \cdot y_1(x)$$

第二步：使用**常数变易法**，设 $y = u(x) \cdot y_1(x)$ 将所设 y 代入到原非齐次方程解出 $u(x)$（过程中一定会消掉一串式子）

第三步：直接写出通解 $y = u(x) \cdot y_1(x)$.

2.2.3 伯努利方程

伯努利方程 $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1)$ 的解法：

以 y^α 同除两边，得到：$(y^{1-\alpha})' + (1-\alpha)P(x) \cdot y^{1-\alpha} = (1-\alpha)Q(x)$ 已经转为线性微分方程.

2.3 全微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \quad (1), \quad \exists u(x,y) \text{ st. } \mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

则称 (1) 为**全微分方程**或**恰当方程**. 注：全微分方程的判定与 §8 中的四种判定**第二型曲线积分与路径无关**的方法可分离变量的微分方程属于全微分方程，其中主要的判定方法为：

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x,y) \in D$$

2.3.1 一些常见的二元函数的全微分

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{y} - \frac{\mathrm{d}y}{x} = \mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$$
$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2-y^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$$

2.4 积分因子

若微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \quad (1)$$

不是全微分方程，$\exists \mu(x,y), \mathrm{st.}$

$$\mu M\mathrm{d}x + \mu N\mathrm{d}y = 0 \quad (2)$$

是全微分方程，则称 $\mu(x,y)$ 为 (1) 的**积分因子**. 积分因子必须满足：

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

2.4.1 "一元积分因子"

X 的"一元积分因子" 若

$$F=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

是 x 的一元函数 $F(x)$，则

$$\mu(x)=e^{\int_{x_0}^{x}F(t)\mathrm{d}t}$$

是一个积分因子.

Y 的"一元积分因子" 类似地，若

$$G=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}$$

是 y 的一元函数 $G(y)$，则

$$\mu(y)=e^{\int_{y_0}^{y}G(t)\mathrm{d}t}$$

是一个积分因子.

2.4.2 齐次方程的积分因子

对于齐次方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

$$\text{即}\quad y'=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

则此齐次方程的一个积分因子为：

$$\mu=\frac{1}{xP+yQ}$$

2.5 可降阶的二阶 ODE

2.5.1 $y''=f(x,y')$ 型二阶 ODE

设 $y'=P(x)$，则 $y''=P'$，原方程化为一阶方程 $P'=f(x,P)$，设其通解为 $P=\varphi(x,C_1)$，两边对 x 积分得到原方程的通解 $y=\int\varphi(x,C1)\mathrm{d}x$.

2.5.2 $y''=f(y,y')$ 型二阶 ODE

设 $y'=P(y)$，则 $y''=P\cdot P'$，原方程化为一阶方程 $P\cdot P'=f(y,P)$，设其通解为 $P=\psi(y,C_1)$，分离变量后积分得到原方程的通解 $\int\mathrm{d}y/\psi(y,C1)=x$.

3 ODE 解的存在唯一性定理

若初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 中的 $f(x,y)$ 在闭矩形域

$$R=\{(x,y)\big|\ |x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}$$

连续，且在此矩形域内对 y 满足**李普希兹条件**，即

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,\quad (x,y_1),(x,y_2)\in R$$

则此初值问题在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上有且只有一个解，其中常数 $h=\min(a,\frac{b}{M}),\quad M=\max\{|f(x,y)|,(x,y)\in R\}$.

3.1 皮卡序列的作法

$$\begin{aligned}
&\text{一次近似解：}y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)\mathrm{d}x,\quad x\in[x_0-h,x_0+h],\\
&\text{二次近似解：}y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\big(x,y_1(x)\big)\mathrm{d}x,\quad x\in[x_0-h,x_0+h],\\
&\text{三次近似解：}y_3(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\big(x,y_2(x)\big)\mathrm{d}x,\quad x\in[x_0-h,x_0+h],\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

4 高阶线性 ODE

形如

$$y^n(X)+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x)$$

的方程称为 n 阶线性微分方程, 其中 $p_i(x)$ 连续.

定理 各阶线性微分方程均存在唯一性定理.

定义 类似线性代数中的定义，可用线性组合定义函数组 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**线性无关**与**线性相关**.

4.1 线性方程解的叠加原理

类似一阶情形，高阶线性非齐次方程的解与其对应的齐次方程的解有一系列关系.

其中较重要的有：

$$m\cdot\text{齐特解}_1+n\cdot\text{齐特解}_2=\text{齐特解}_3$$

$$\text{齐通解}+\text{非齐特解}=\text{非齐通解}\quad\boxed{Y+y^*=y}$$

$$\text{线性齐次方程中},n\text{个线性无关的特解的线性组合是其通解}$$

若 $a_{n-1},\cdots,a_0$ 为常数，且

$$\begin{cases}y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=f_1(x)\text{的特解为}y_1^*,\\ \qquad\vdots\\ y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=f_1(x)\text{的特解为}y_t^*,\end{cases}$$

则 $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=f_1(x)+\cdots+f_t(x)$ 的特解为 $y=y_1^*+\cdots+y_t^*$.

4.2 朗斯基 (Wronski) 行列式

对于函数组 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$，朗斯基行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

$$W(x)\equiv 0 \Longleftrightarrow \varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)\text{线性相关}.$$

可以证明，朗斯基行列式要么恒为零，要么无零点.

注：雅克比行列式判定通积分中多个任意常数是否独立，朗斯基行列式判定函数组是否线性无关，朗斯基行列式是雅克比行列式在通解为函数组线性组合的情形.

4.3 线性常系数齐次 ODE 与特征方程

对微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0,$$

其中 $a_{n-1},\cdots,a_0$ 为常数，**特征方程**为：

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

可解得 n 个特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 根据下表，可写出每个特征根所对应的线性无关的特解（或 k 个特征根对应 k 个特解），从而表示出上述微分方程的通解.

特征根	对应的线性无关的特解
单实根 λ	$e^{\lambda x}$
k 重实根 $\lambda(k>1)$	$e^{\lambda x},xe^{\lambda x},\cdots,x^{k-1}e^{\lambda x}$
单共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x$
k 重共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta(m>1)$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,xe^{\alpha x}\sin\beta x$
	$\cdots,x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

4.4 若干特殊线性常系数非齐次 ODE 的特解 (待定系数法)

高阶微分方程 $y^{(m)}+b_{m-1}y^{(m-1)}+\cdots+b_1y'+b_0y=f(x)$ 中, 若 $f(x)$ 的形式在下表列出, 则特解可以直接根据下表设出.(待定系数)

$f(x)$ 的形式	条件	特解的形式
$\boxed{P_n(x)}\cdot\boxed{e^{\alpha x}}$	$\alpha\neq\lambda$	$Q_n(x)e^{\alpha x}$
	$\alpha=\lambda(k\text{重})$	$x^kQ_n(x)e^{\alpha x}$
$\boxed{P_n(x)}\cdot\boxed{e^{\alpha x}}\cdot\boxed{(a\cos\beta x+b\sin\beta x)}$	$\alpha\pm \mathrm{i}\beta\neq\lambda$	$[Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$
$(\beta\neq 0)$	$\alpha\pm \mathrm{i}\beta=\lambda(k\text{重})$	$x^k[Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$

再对待定系数的特解求 m 次导数，与原 ODE 对比系数，可以将待定的系数全部解出.

注：(1)$P_n(x), Q_n(x), R_n(x)$ 为 n 次多项式，$Q_n(x), R_n(x)$ 各需要待定 $n+1$ 个系数.

(2)$\alpha(\pm \mathrm{i}\beta) = k$ 重 λ 时，特解代入到微分方程对比系数时，只有 $0 \sim n$ 次项的验证有用，最高的若干项可能不必验证.

4.5 二阶线性非齐次 ODE 与常数变易法 ($f(x)$ 符合特定形式时可用待定系数法代替)

设已求出

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$$

的两个线性无关的特解 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$，则可设

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$$

的特解为：

$$y = u_1(x) \cdot \varphi_1(x) + u_2(x) \cdot \varphi_2(x)$$

在约束条件

$$u_1' \varphi_1 + u_2' \cdot \varphi_2 = 0$$

下，求出 y', y''（求导可跳过，直接记住以下方程组即可）后代入到原 ODE 可得：

$$\begin{cases} u_1' \varphi_1 + u_2' \varphi_2 = 0 \\ u_1' \varphi_1' + u_2' \varphi_2' = f(x) \end{cases}$$

直接解出 u_1', u_2'，再直接积分求得 u_1, u_2.

4.6 欧拉方程

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

其中 a_i 为常数.

$x > 0$ 时设 $x = e^t$，再将 y 对 x 的各阶导数转换为 y 对 t 的导数后，代入到原 ODE，可消去所有 $x = e^t$ 项，得到常系数线性 ODE.