Dirac 广义相对论 归纳

参宿四星云

2023 年 2 月 13 日

此归纳是 Dirac *General Theory of Relativity* 的知识点集萃，我把本书的 35 个章节大致分为了 4 个 section（其实有点杂乱），每部分都梗概性地写出了一些定义和重要结论，还有我的一些理解（这个到后面就很少了，因为我理解起来有些困难，欢迎大家来补充）。学习一门课时整理一遍笔记是我的习惯。我在看本书的时候并没有硬性记忆任何定义，而是尝试从各种角度理解它们，当然我水平有限，有些概念理解得不好。本书没有习题，我也懒得找习题，那就更要整理一下作者的思路了。我想做漂亮的、让我有重温的欲望的笔记，我当然就喜欢用 LaTeX 了。我并不确定这些知识点在我将来的学习和研究中，何时能用上。用得上的时候，本归纳可以当公式小册子，即查即用；用不上的时候，那也随便，偶尔想起来就翻一翻，没想起来你就吃灰吧⋯⋯不过应该是用得上的。

前置知识

必须了解： 多元微积分、线性代数

非常有助： 高中物理、数理方程、理论力学（拉格朗日力学）、变分法基础

也许有助： 微分几何（矢量分析、张量分析）、电动力学、狭义相对论、场论

§1　弯曲空间

1.1　度规与坐标系

协变矢量有一个下标，逆变矢量有一个上标。二者转换关系如下：

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \tag{1a}$$

$$A^\nu = g^{\mu\nu} A^\mu \tag{1b}$$

其中度规（基本张量，fundamental tensors）$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$，$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ 为二阶对称张量，一般的空间中，$g_{\mu\nu}$ 是逐点改变的，是场量。（任意场量，包括标量场量，都可看作一组坐标系的函数）

有重要性质：

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho}=g_{\mu}^{\rho} \tag{2}$$

（其中 g_{μ}^{ρ} 即为 Levi-Civita 记号 δ_{μ}^{ρ}）

对于不同的坐标系 $\{x^{\mu}\}$ 与 $\{x^{\mu'}\}$，Jacobian（雅克比行列式）可记为：

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}=x^{\mu'}{}_{,\nu} \tag{3}$$

（注：指标不同并不代表坐标系不同，指标是否有撇才代表坐标系不同） 逆变矢量的坐标变换规则为：（协变矢量类似）

$$A^{\mu'}=x^{\mu'}{}_{,\nu}A^{\nu} \tag{4}$$

对于任何张量，都可以使用 Jacobian 替换指标的坐标系，这可用于张量的判定。对于一阶张量（矢量）的坐标变换，如果变过去再变回来，就相当于没有变化，那么有：

$$x^{\lambda}{}_{,\mu'}x^{\mu'}{}_{,\nu}=g_{\nu}^{\lambda} \tag{5}$$

Property:

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}=-g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}g_{\mu\nu,\sigma} \tag{6a}$$

$$\delta g^{\alpha\beta}=-g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{6b}$$

$$g_{,\sigma}=gg^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\sigma} \tag{6c}$$

$$\delta g=gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{6d}$$

闵氏度规 $g_{\mu\nu}$ 的矩阵形式为：

$$g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1) \tag{7}$$

（高显经典力学中定义的闵氏度规 $\eta_{\mu\nu}$ 调换了上式的 -1 与 $+1$）

1.2 Christoffel symbols

elements of distance

$$\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}\begin{cases}>0, & \text{timelike interval}\\ <0, & \text{spacelike interval}\end{cases} \tag{8}$$

Christoffel symbols (sym between the last two/two lower suffixes, nontensors)

$$\text{of the first kind}\quad \Gamma_{\mu\nu\sigma}=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\sigma}+g_{\mu\sigma,\nu}-g_{\nu\sigma,\mu}\right) \tag{9a}$$

$$\text{of the second kind}\quad \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}=g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\sigma} \tag{9b}$$

properties

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma}+\Gamma_{\nu\mu\sigma}=g_{\mu\nu,\sigma} \tag{10a}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}=\tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\nu} \tag{10b}$$

change in A_ν, B^ν under **parallel displacement**

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_\nu &= A^\mu \Gamma_{\mu\nu\sigma}\mathrm{d}x^\sigma \\ &= \Gamma^\mu_{\nu\sigma}A_\mu \mathrm{d}x^\sigma \qquad (11a) \\ \mathrm{d}B^\nu &= -\Gamma^\nu_{\mu\sigma}B^\mu \mathrm{d}x^\sigma \qquad (11b) \end{aligned}$$

Christoffel symbols（联络系数、克氏符号）直观上的物理意义是，基矢平移的改变系数。

1.3 Geodesics

Geodesics（短程线、测地线）：velocity vector $v^\mu = \dfrac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}s}$ is shifted by parallel displacement, where s is the proper time（固有时、原时）.

the equations of motion:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z^\mu}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}z^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}z^\sigma}{\mathrm{d}s} = 0} \quad \text{or} \quad \boxed{\left(v^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}v^\sigma\right)v^\nu = 0} \quad \text{or} \quad \boxed{v^\mu{}_{:\nu}v^\nu = 0} \qquad (12)$$

	z^μ	path	assumption
$\mathrm{d}s^2 = 0$	null vector	null geodesics	photon
$\mathrm{d}s^2 > 0$	timelike vector	timelike geodesics	mass particle
$\mathrm{d}s^2 < 0$	spacelike vector	spacelike geodesics	咩啊

the stationary property of geodesics: $\delta \displaystyle\int \mathrm{d}s = 0$.

1.4 Covariant differentiation

Covariant differentiation（协变微分）：

$$\begin{aligned} A_{\mu:\nu} &= A_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha \qquad (13a) \\ T_{\mu\nu:\sigma} &= T_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}T_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}T_{\mu\alpha} \qquad (13b) \\ Y_{\mu\nu\cdots:\sigma} &= Y_{\mu\nu\cdots,\sigma} - \text{a } \Gamma \text{ term for each lower suffix} \qquad (13c) \\ A^\mu{}_{:\nu} &= A^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu}A^\alpha \qquad (13d) \\ &\vdots \end{aligned}$$

properties:

$$(A_\mu B_\nu)_{:\sigma} = A_{\mu:\sigma}B_\nu + A_\mu B_{\nu:\sigma} \qquad (14)$$

$$S_{:\sigma} = S_{,\sigma} \qquad (15)$$

conclusion from eq(10a):

$$g_{\mu\nu:\sigma} = 0 \qquad (16)$$

thus **the $g_{\mu\nu}$ count as constants under covariant differentiation**.

- 当张量方程包含场量的导数时，**必为协变导数**
- 向量 A^{μ} 的协变散度为 $A^{\mu}{}_{:\mu}$
- **Geodesic equation(12) 可写为** $\boxed{v^{\mu}{}_{:\nu}v^{\nu} = 0}$

1.5 The curvature tensor

两次协变微分交换次序时:

$$\text{scalar:} \quad S_{:\mu:\nu} - S_{:\nu\mu} = 0 \tag{17a}$$

$$\text{vector:} \quad A_{\mu:\rho:\sigma} - A_{\mu:\sigma:\rho} = A_{\beta}R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} \tag{17b}$$

$$\text{the curvature tensor (Riemann-Christoffel tensor)} \quad （曲率张量）R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} - \langle\rho\sigma\rangle \tag{17c}$$

$\langle\rho\sigma\rangle$ 表示把前面所有项交换 ρ 与 σ 后得到的新的项

conclusion:

$$\text{flat space } (g = \text{const}) \quad \Longleftrightarrow \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\beta}R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = \mathbf{0} \tag{18}$$

此结论大意为，“矢量通过平行位移移动有限距离，所得结果与路径无关”等价于“空间平坦”。

The Bianci relations:

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} + R^{\beta}_{\nu\sigma\rho} = 0 \tag{19a}$$

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} + R^{\beta}_{\sigma\nu\rho} + R^{\beta}_{\rho\sigma\nu} = 0 \tag{19b}$$

$$R^{\beta}_{\mu\rho\sigma:\tau} + R^{\beta}_{\mu\tau\rho:\sigma} + R^{\beta}_{\mu\sigma\tau:\rho} = 0 \tag{19c}$$

$$\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right)_{:\beta} = 0 \tag{19d}$$

Contracting the upper and the last suffix of $R^{\beta}_{\nu\rho\mu}$, we get **the Ricci tensor** ($\nu\rho$ sym):

$$R^{\mu}_{\nu\rho\mu} = R_{\nu\rho} \tag{20}$$

Contracting again, we get **the scalar curvature** or **total curvature**:

$$g^{\nu\rho}R_{\nu\rho} = R \tag{21}$$

§2 爱因斯坦引力定律

Einstein's law of grvitation: in empty space (no matter present and no physical fields except the gravitational field),

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0} \quad \text{or} \quad \boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0} \tag{22}$$

2.1 The Newtonian approximation

我们可将 $g_{\mu\nu}$ 看做引力势（有 10 个独立分量，但牛顿近似下只有一个势）。牛顿近似下，可导出运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2(x_m)}{\mathrm{d}\left(x^0\right)^2}=(\sqrt{g_{00}})_{,m} \tag{23}$$

所以牛顿近似下，有 $\sqrt{g_{00}}=1+V$，其中 V 为牛顿引力势，eq(23) 即牛顿力学中的

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=-\nabla V \tag{24}$$

物理量	$g_{\mu\nu,0}$	$\Gamma_{m0n}(\Gamma^m_{0n})$	g_{00}
牛顿近似	0	0	$1+2V$(一阶)
近似意义	静态引力场	空间部分平直	牛顿势

2.2 爱因斯坦引力定律的史瓦西解

前提：静止的；物体和场是球对称的。

空间坐标取 $\{x^m\}=\{r,\theta,\phi\}$，那么

$$\mathrm{d}s^2=e^{2\nu}\mathrm{d}t^2-e^{2\lambda}\mathrm{d}r^2\ \underset{(为了方便)}{-1\cdot r^2}\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{25a}$$

$$g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\left(\ e^{2\nu}\ ,\ -e^{2\lambda}\ ,\ -r^2\ ,\ -r^2\sin^2\theta\ \right) \tag{25b}$$

其中 $e^{2\nu},e^{2\lambda}$ 是 r 的函数

代入到 $R_{\mu\nu}=0$，并假设边界条件 $\lambda,\nu\to 0\ (r\to\infty)$，则解得

$$g_{00}=-\frac{1}{g_{11}}=1-\frac{2m}{r}\ ,\qquad \text{其中 } m \text{ 为积分常数} \tag{26}$$

史瓦西解为：

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2-r^2\mathrm{d}\theta^2-r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{27}$$

下面我们考虑质点竖直自由降落。运动方程 (geodesic equation) 可推出

$$g_{00}v^0=k\ ,\quad \text{其中 } k \text{ 为粒子开始降落处 } g_{00} \text{ 的值} \tag{28}$$

还有 $1=g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$（只用考虑 g_{00},g_{11} 项）、$g_{00}g_{11}=-1$，可得

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}=\frac{v^0}{v^1}=-k\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(k^2-1+\frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{29a}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=\frac{1}{v^1}=-\left(k^2-1+\frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{29b}$$

当 $r \to 2m$（临界半径 critical radius）时，t 积分发散，即被 r 很大处的某一静止观察者观察，质点到达临界半径所需时间无穷大。而 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} \to -\frac{1}{k}$，所需固有时有限。

其中两种时间 t 和 s 的关系为

$$\mathrm{d}t = (g_{00})^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s = \underbrace{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{红移因子}}\mathrm{d}s \tag{30}$$

质点趋于临界半径时，红移因子趋于无穷。

为了使 $r = 2m$ 时不奇异，我们将坐标 t, r 换掉：

$$\tau = t + f(r), \qquad \rho = t + g(r), \tag{31a}$$

$$g' = \left(\frac{r}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad f' = \frac{2m}{r}g' \tag{31b}$$

然后史瓦西解 eq(27) 可写为：

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \frac{2m}{r}\mathrm{d}\rho^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{32a}$$

$$= \mathrm{d}\tau^2 - \frac{2m}{\left[\frac{3}{2}\sqrt{2m}(\rho-\tau)\right]^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}\rho^2 - \left[\frac{3}{2}\sqrt{2m}(\rho-\tau)\right]^{\frac{4}{3}}\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{32b}$$

2.3 物质的标量场 ρ

有物质存在时，爱因斯坦方程 $R_{\mu\nu} = 0$，即 $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0$ 需要修改。

我们用标量场 ρ 表示物质，并设连续物质流的**逆变密度矢量 (covariant vector density)**：

$$p^\mu = \rho\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\surd = \rho v^\mu\surd = \begin{bmatrix}\rho v^0\surd \\ \rho v^m\surd\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{物质密度} \\ \text{物质流密度}\end{bmatrix} \tag{33}$$

$p^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ 表示是某一时刻体元 $\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ 内的物质量

$p^1\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ 表示时间间隔 $\mathrm{d}x^0$ 内流过面元 $\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ 的物质量

那么**质量守恒 (conservation of the matter)**的条件为：

$$(\rho v^\mu\surd)_{,\mu} = 0 \tag{34a}$$

$$\text{or} \qquad (\rho v^\mu)_{:\mu} = 0 \tag{34b}$$

ρ 还可以表示

$$\textbf{物质能动张量} \quad T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix}\rho v^0 v^0\surd & \rho v^0 v^m\surd \\ \rho v^m v^0\surd & \rho v^m v^n\surd\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{能量密度} & \text{能流密度} \\ \text{动量密度} & \text{动量流密度}\end{bmatrix} \tag{35}$$

爱因斯坦方程由此修改为：

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -8\pi Y^{\mu\nu} = -8\pi\rho v^\mu v^\nu \tag{36}$$

实际上，如果直接假设上式，那么可以直接得到质量守恒和质量沿测地线运动。

2.4 一些补充

2.4.1 电荷守恒定律

Maxwell's equations 的表示方法

电磁学	本书法一	本书法二	**本书法三 (GR)**
		$F_{\mu\nu} := \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu}$ $\kappa^0 := \phi, \quad \kappa^m := A^m$	$F_{\mu\nu} := \kappa_{\mu:\nu} - \kappa_{\nu:\mu}$ $\kappa^0 := \phi, \quad \kappa^m := A^m$
		$J^0 := \rho, \quad J^m := j^m$	
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^{\mu}$	$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 4\pi J^{\mu}$
$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - 4\pi\vec{j}$		
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\nabla \cdot \vec{H} = 0$	$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = F_{\mu\nu:\sigma} + F_{\nu\sigma:\mu} + F_{\sigma\mu:\nu} = 0$	
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$		
	$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi$		
	$\vec{H} = \nabla \cdot \vec{A}$		
			$J^{\mu}\surd_{,\mu} = 0$

电荷守恒定精确地成立，不受空间弯曲的影响。

$$\text{其中，}\textbf{电磁张量}\quad F_{\mu\nu} := \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

2.4.2 Harmonic coordinates（协和坐标）

协合坐标是一类特殊的坐标系。

满足 $\Box x^{\lambda} = 0$ 即 $g^{\mu\nu}\left(x^{\lambda}{}_{,\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} x^{\lambda}{}_{,\alpha}\right) = 0$ 的坐标系为协和坐标。

等价条件有：

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=0 \tag{38a}$$

$$\left(g^{\mu\nu}\surd\right)_{,\nu}=0 \tag{38b}$$

两条通用结论：（只有引力场、无电荷物质就成立，不论是否是协和坐标。引力作用量原理推导要用到）

$$\left(g^{\mu\nu}\surd\right)_{,\sigma}=\left(-g^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\sigma}-g^{\mu\beta}\Gamma^{\nu}_{\beta\sigma}+g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\beta\sigma}\right)\surd \tag{39a}$$

$$\left(g^{\mu\nu}\surd\right)_{,\nu}=\ -g^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu}\surd \tag{39b}$$

§3 用作用量推导爱因斯坦引力定律

3.1 Tensor densities

Property: if S is a scalar quantity, $S=S'$, then

$$\int_D S\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x=\int_{D'} S\sqrt{-g'}\ \mathrm{d}^4x' \tag{40}$$

We write $\sqrt{-g}$ simply as $\surd$. Thus

$$\int S\surd \mathrm{d}^4x=\text{invariant} \tag{41}$$

对于同一片积分区域，由不同的坐标系计算出的 $\int S\surd\mathrm{d}^4x$ 的值相同，这说明 $\int S\surd\mathrm{d}^4x$ 的值与坐标系的选取无关（积分不变量）。对于两个不同的坐标系，$S\surd$ 与 d^4x 此大彼小，但乘积保持相等。$S\surd$ 称为 **scalar density**；类似，$T_{\mu\nu}\surd$ 称为 **tensor density**.

Other properties:

$$\surd_{,\nu}=\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}\surd=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\nu}\surd \tag{42a}$$

$$\left(A^{\mu}\surd\right)_{,\mu}=A^{\mu}{}_{:\mu}\surd \tag{42b}$$

$$\text{if } F^{\mu\nu} \text{ is antisym. } F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}\text{, then}\quad \left(F^{\mu\nu}\surd\right)_{,\nu}=F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\surd \tag{42c}$$

if 4-divergence (covariant) $A^{\mu}{}_{:\mu}=0$,

$$\left(\iiint_\Omega A^0\surd\mathrm{d}^3x\right)_{,0}=-\iiint_\Omega\left(A^m\surd\right)_{,m}\mathrm{d}^3x=\oiint_{\partial\Omega}A^m\surd\mathrm{d}S_m \tag{43}$$

3.2 引力作用量 (The gravitational action)

引入引力作用量

$$I=\int \mathrm{d}^4x\, R\surd=\int \mathrm{d}^4x\left[g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma,\nu}-\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\sigma}\right)+g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho}-\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}\right)\right]\surd \tag{44a}$$

$$=:\int \mathrm{d}^4x\,(R^*-L)\surd \tag{44b}$$

$$\overset{\text{恒等式 (39)}}{=\!=\!=}\int \mathrm{d}^4x\, \underline{\underline{L\surd}} \tag{44c}$$

$$=:\int \mathrm{d}^4x\,\mathscr{L}\quad=\int \mathrm{d}x^0\,\underbrace{\mathscr{L}\mathrm{d}^3x}_{\text{Lagrangian}} \tag{44d}$$

$$\delta I=\int \mathrm{d}^4x\,\delta\mathscr{L}\simeq\int \mathrm{d}^4x\, R_{\mu\nu}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\surd\right)=-\int \mathrm{d}^4x\left(R^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)\surd\delta g_{\mu\nu} \tag{45}$$

由此，上式 $\delta I=0$ 等价于爱因斯坦引力定律（无质量密度情形）(22)。

3.3 另外三种重要作用量

3.3.1 物质连续分布作用量 (The action for a continuous distribution of matter)

存在质量密度时，构建新的作用量原理：

$$\delta(I_g+I_m)=0 \tag{46}$$

I_g 为 empty space 中的作用量乘系数 $I_g=\kappa I$；

I_m 的设法参照狭义相对论或经典力学：

$$I_m=-m\int \mathrm{d}s=-\int p^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}s=-\int \rho\surd\mathrm{d}^4x=-\int (p^\mu p_\mu)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}^4x \tag{47}$$

继续推导

$$\begin{aligned}\delta I_m&=-\int\delta\left[(p^\mu p_\mu)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}^4x=-\int\left[\frac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu\surd\delta g_{\mu\nu}+v_\mu\delta p^\mu\right]\mathrm{d}^4x\\&\simeq-\int\left[\frac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu\surd\delta g_{\mu\nu}-v_{\mu:\nu}\rho v^\nu\surd\delta x^\mu\right]\mathrm{d}^4x\end{aligned} \tag{48}$$

那么

$$\delta(I_g+I_m)=-\int\underbrace{\left[\kappa\left(R^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)+\frac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu\right]\surd}_{=0}\delta g_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x\;+\int\underbrace{v_{\mu:\nu}\rho v^\nu\surd}_{=0}b^\mu\mathrm{d}^4x \tag{49}$$

其中 μ 为物质元位移：由 z^μ 位移到 $z^\mu+b^\mu$。坐标作微小改变 $x^{\mu'}=x^\mu+b^\mu$ 的 b^μ 也是同一个。b^μ 类似于 δz^μ 或 δx^μ.

令 $\kappa=\frac{1}{16\pi}$ 则，以上的第一部分 $=0$等价于修改后的爱因斯坦方程 eq.(36)，第二部分 $=0$等价于测地线方程 eq.(12)，即 $v^\mu{}_{:\nu}v^\nu=0$.

3.3.2 电磁场作用量 (The action for the EM field)

$$I_{em} = -\frac{1}{16\pi}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{\ } \mathrm{d}^4x \tag{50}$$

I_{em} is a function of $g_{\mu\nu}$ and the dirivatives of the EM potentials $\kappa^\mu := (\phi, A^m)$.

$$\delta I_{em} = \int \left[-\frac{1}{2}E^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\delta\kappa_\mu\right] \tag{51}$$

where $E^{\mu\nu}$ is the **stress-energy tensor of the EM field**, a sym tensor.

$$\begin{aligned} 4\pi E^{\mu\nu} &:= -F^{\rho}{}_{nu}F^{\sigma\nu} + \frac{1}{4}g^{\rho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E^2+H^2) & S^1 & S^2 & S^3 \\ S^1 & & & \\ S^2 & & \boxed{\text{Maxwell stress tensor}} & \\ S^3 & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{52}$$

where $\frac{1}{2}(E^2+H^2)$ is the energy density, $S^m = \epsilon^m_{ij}E^iH^i$ is the Poynting vector giving the rate of flow of energy.（能流密度——坡印廷矢量）

3.3.3 带电物质作用量 (The action for charged matter)

$$I_q = -\int \kappa_\mu \sigma v^\mu \sqrt{\ }\mathrm{d}^4x = -\int \kappa_\mu J^\mu \sqrt{\ }\mathrm{d}^4x = -\int \kappa_\mu \mathscr{J}\,\mathrm{d}^4x \tag{53a}$$

$$\delta I_q = \int \sigma\left(-v^\mu\delta\kappa_\mu + F_{\mu\nu}v^\nu b^\mu\right)\sqrt{\ }\mathrm{d}^4x \tag{53b}$$

3.4 综合作用量原理 (The comprehensive action principle)

引力场与一些场之间有相互作用时，将所有场的作用量加起来 $=0$，这就是综合作用量原理

$$\delta(I_g + I') = 0 \tag{54}$$

比如上述四个场：

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\left(I_g + I_m + I_{em} + I_q\right) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \Bigg[-\frac{1}{16\pi}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + 8\pi\rho v^\mu v^\nu + 8\pi E^{\mu\nu}\right)\sqrt{\ }\,\delta g_{\mu\nu} \\ &\qquad \left(\rho v_{\mu:\nu}v^\nu + \sigma F_{\mu\nu}v^\nu\right)\sqrt{\ }\,b^\mu \\ &\qquad \left(\frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}{}_{:\nu} - \sigma v^\mu\right)\sqrt{\ }\,\delta\kappa_\mu \Bigg] \end{aligned} \tag{55}$$

令以上三项分别 $=0$（事实上这三个等式并不是独立的）

第一项是修正后的爱因斯坦方程 (36) 中，

$$Y^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu + E^{\mu\nu} \tag{56}$$

第二项的第二项是 geodesic, 第一项给出 Lorentz force.
第三项是 Maxwell equations for the presence of charged matter,

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 4\pi J^{\mu} \tag{57}$$

场/分布	Lagrangian	能动张量	$\delta\phi$
引力	$\frac{1}{16}R\sqrt{}$		$\delta g_{\mu\nu}$
质量	$-\rho\sqrt{} = (p^\mu p_\mu)^{\frac{1}{2}}$	$T^{\mu\nu}$	$\delta g_{\mu\nu}$ & b^μ
电磁	$-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{}$	$E^{\mu\nu}$	$\delta g_{\mu\nu}$ & κ_μ
电荷	$-\sigma v^\mu \kappa_\mu \sqrt{}$		b^μ & κ_μ

设

$$I_g = \int \mathscr{L} \mathrm{d}^4 x, \qquad I' = \int \mathscr{L}' \mathrm{d}^4 x \tag{58}$$

再设 $\delta\phi_1, \cdots, \delta\phi_n$ 是类似 $\delta\kappa^\mu, b^\mu$ 的场量的微小改变量,

$$\delta(I_g + I') = \int \left(p^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \chi^n \delta\phi_n\right)\sqrt{}\ \mathrm{d}^4 x \tag{59a}$$

$$p^{\mu\nu} = 0 \tag{59b}$$

$$\chi^n = 0 \tag{59c}$$

通常, $\mathscr{L}'$ 不含 $g_{\mu\nu}$ 的导数项, 那么有

$$\begin{gathered} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - 16\pi N^{\mu\nu} = 0, \\ \text{where} \quad N^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial g_{\mu\nu}} = -2Y^{\mu\nu}. \end{gathered} \tag{60}$$

§4 更多

4.1 引力场的能动赝张量（其实我不懂）

并没有同时满足——守恒律、是一个张量、仅由度规及其导数构成——的能动张量（密度）。若放宽“是一个张量”的条件，就存在。我们可以定义**引力场的能动赝张量 (the energy-momentum pseudotensor of the gravitational field)** (Dirac 的书写作 pseudo-energy tensor, 我个人觉得有些奇怪)

$$t_\mu{}^\nu = \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\mu} - g_\mu^\nu L \tag{61a}$$

$$t_\mu{}^\nu\sqrt{} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\mu} - g_\mu^\nu \mathscr{L} \tag{61b}$$

能动赝张量的显式为：（守恒律的推导用不到）

$$\begin{aligned} 16\pi t_\mu{}^\nu \surd &= \left(\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - g^\nu_\beta \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}\right)\left(g^{\alpha\beta}\surd\right)_{,\mu} - g^\nu_\mu \mathscr{L} \\ \text{where}\quad \mathscr{L} &= g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\right)\surd. \end{aligned} \tag{62}$$

采用协和坐标，可以推导出结论：

$$\left[\left(t_\mu{}^\nu + Y_\mu{}^\nu\right)\surd\right]_{,\nu} = 0 \tag{63}$$

这表明，$\left(t_\mu{}^\nu + Y_\mu{}^\nu\right)\surd$ 是一个守恒量，可以认为它是能量-动量密度，其中 $t_\mu{}^\nu\surd$ 是引力场的能量-动量密度，$Y_\mu{}^\nu\surd$ 是其他场的能量-动量密度。

可惜 $t_\mu{}^\nu$ 不是张量，因此，在某一时刻、某确定（三维）区域内的能量与坐标系可能有关，即引力能不是定域的。但有些情况下，

$$\int_{V\to\infty}\left(t_\mu{}^\nu + Y_\mu{}^\nu\right)\surd \mathrm{d}^3x \tag{64}$$

还是能给出系统的总能量和总动量。

4.2 引力波

$$\left.\begin{array}{r} R_{\mu\nu}=0 \\ \text{采用协和坐标} \\ \text{弱场（忽略高阶项）} \end{array}\right\} \Longrightarrow g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma,\mu\nu}=0 \quad \text{即} \quad \Box g_{\mu\nu}=0 \tag{65}$$

这表明 $g_{\rho\sigma}$ 的 10 个独立分量都满足达朗贝尔方程，他们的解都可分解为速度为光速的波，即引力波。

当引力波沿同一方向传播时（这是非常特殊的情况），我们可以得到波的能量的显式结果，证明略。

这种情况，可以将 $g_{\mu\nu}$ 视为单一变量 $x^0 - x^3$ 的函数；更一般的话，将 $g_{\mu\nu}$ 视为单一变量 $l_\sigma x^\sigma$ 的函数，其中 l_σ 是满足 $g^{\rho\sigma}l_\sigma l_\rho$ 的无量纲正交向量组。

那么 $g_{\mu\nu}$ 求导得

$$g_{\mu\nu,\sigma} = g_{\mu\nu}{}'(l_\sigma x^\sigma) l_\sigma := u_{\mu\nu} l_\sigma \tag{66}$$

代入到 $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ 再代入到 L，得到

$$L = 0 \tag{67}$$

即作用量密度为零。

引力波的偏振，其实我不懂

4.3 宇宙项

真空场方程推广为：

$$R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} \tag{68a}$$

$$\text{即}\quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\lambda g_{\mu\nu} \tag{68b}$$

可以推得

$$R = 4\lambda \tag{69}$$